

# 普通高級中學必修科目「數學」課程綱要

## 壹、課程目標

普通高級中學必修科目「數學」課程欲達成的目標如下：

- 一、培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
- 二、培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。
- 三、培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。

## 貳、核心能力

- 一、演算能力：能熟練多項式、分式、根式、指對數、三角的運算及估算。
- 二、抽象化能力：能將具體世界中的概念以數學形式表徵。
- 三、推理能力：能認識證明，並進行推論。
- 四、連結能力：能整合數學內部知識並與具體世界連結。
- 五、解題能力：能解決數學形式與生活情境中的數學問題。
- 六、溝通能力：能正確、流暢地利用口語或文字表達解題想法。
- 七、使用計算工具的能力：能使用計算器來處理繁瑣的計算與解決較複雜的問題。

## 參、時間分配

第一、二學年每學期四學分，每週授課四節。

## 肆、教材綱要

普通高級中學必修科目「數學」課程分為數學 I、II、III、IV，各四學分。

一、各學年課程的定位如下：

高一數學（數學 I、II）的定位為學習與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析時所需要的基礎。高一上處理有關連續量的課題，包括由度量連續量所產生的實數，以及描述量與量關係的基本函數，如多項式函數與指數、對數函數。高一下處理有關離散量的課題，包括數列與級數、排列組合、生活中常見的古典機率，以及其他學科常用到的數據分析等。

高二數學（數學 III、IV）的定位為社會組與自然組學生在學習上所應具備的數學知識，其主題為坐標、向量幾何與線性代數。

二、教材綱要包括主題、子題、內容、備註。備註欄表列學習規範及全國性評量不應測試的內容。有關綱要內容的說明與範例則置於附錄。

三、課程分版：高二數學分為 A、B 兩版，B 版的內容包含 A 版，所增加的題材以加註◎號區隔。

第一學年：數學 I (函數)、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、數與式	1. 數與數線	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1.3 乘法公式、分式與根式的運算	1.2 不含非十進位的表示法
	2. 數線上的幾何	2.1 數線上的兩點距離與分點公式 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式	
二、多項式函數	1. 簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數 1.2 二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次 (含) 以下的單項函數
	2. 多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法 (含除式為一次式的綜合除法)、除法原理 (含餘式定理、因式定理) 及其應用、插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次
	3. 多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、 $\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵
	4. 多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式
三、指數、對數函數	1. 指數	1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律	
	2. 指數函數	2.1 介紹指數函數的圖形與性質 (含定義域、值域、單調性、凹凸性)	
	3. 對數	3.1 對數的定義與對數定律 3.2 換底公式	3.2 換底公式不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題
	4. 對數函數	4.1 介紹對數函數的圖形與性質 (含定義域、值域、單調性、凹凸性)	

主題	子題	內容	備註
	5. 指數與對數的應用	5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號 5.2 處理乘除與次方問題 5.3 等比數列與等比級數 5.4 由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題	5.1 不含表尾差
附錄	認識定理的敘述與證明	介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法（含 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明）	

數學 II (有限數學)、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、數列與級數	1. 數列 2. 級數	1.1 發現數列的規律性 1.2 數學歸納法 2.1 介紹 $\Sigma$ 符號及其基本操作	1.1 只談實數數列、不含二階遞迴關係 1.2 不等式型式的數學歸納法置於數學甲/乙 I 數列與極限中討論
二、排列、組合	1. 邏輯、集合與計數原理 2. 排列與組合 3. 二項式定理	1.1 簡單的邏輯概念：介紹「或」、「且」、「否定」及笛摩根定律 1.2 集合的定義、集合的表示法與操作 1.3 基本計數原理（含窮舉法、樹狀圖、一一對應原理） 1.4 加法原理、乘法原理、取捨原理 2.1 直線排列、重複排列 2.2 組合、重複組合 3.1 以組合概念導出二項式定理、帕斯卡三角形	2.1 不含環狀排列 本章節要避免情境不合常理、過深、或同時涉及太多觀念的題型 3.1 不含超過二項的展開式
三、機率	1. 樣本空間與事件 2. 機率的定義與性質 3. 條件機率與貝氏定理	1.1 樣本空間與事件 2.1 古典機率的定義與性質 3.1 條件機率、貝氏定理、獨立事件	2.1 不含幾何機率
四、數據分析	1. 一維數據分析 2. 二維數據分析	1.1 平均數、標準差、數據標準化 2.1 散佈圖、相關係數、最小平方方法	1.1 只談母體數據分析，不涉及抽樣，可用計算工具操作 2.1 可用計算工具操作。最小平方方法的證明置於附錄
附錄	1. 演算法 2. 最小平方法	輾轉相除法、二分逼近法 最小平方方法的證明	

第二學年：數學 III (平面坐標與向量)、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、三角	1. 直角三角形的邊角關係	1.1 直角三角形的邊角關係 (正弦、餘弦)、平方關係、餘角關係	2.1 cot, sec, csc 置於數學甲 I、數學乙 I  4.1 不含和差化積、積化和差公式 5.1 可使用計算器求出三角函數值
	2. 廣義角與極坐標	2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切、平方關係、補角 2.2 直角坐標與極坐標的變換	
	3. 正弦定理、餘弦定理	3.1 正弦定理、餘弦定理	
	4. 差角公式	4.1 差角、和角、倍角、半角公式	
	5. 三角測量	5.1 三角函數值表 5.2 平面與立體測量	
二、直線與圓	1. 直線方程式及其圖形	1.1 點斜式 1.2 兩線關係 (垂直、平行、相交)、聯立方程式	3.2 不含兩圓的關係
	2. 線性規劃	2.1 二元一次不等式 2.2 線性規劃 (目標函數為一次式)	
	3. 圓與直線的關係	3.1 圓的方程式 3.2 圓與直線的相切、相割、不相交的關係及其代數判定	
三、平面向量	1. 平面向量的表示法	1.1 幾何表示、坐標表示，加減法、係數乘法 1.2 線性組合、平面上的直線參數式	
	2. 平面向量的內積	2.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式 2.2 直線的法向量、點到直線的距離、兩向量垂直的判定	
	3. 面積與二階行列式	3.1 面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定 3.2 兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式	

數學 IV (線性代數)、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、空間向量	1.空間概念 2.空間向量的坐標表示法 3.空間向量的內積 4.外積、體積與行列式	1.1 空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係 2.1 空間坐標系：點坐標、距離公式 2.2 空間向量的加減法、係數乘法，線性組合 3.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式、兩向量垂直的判定 4.1 外積與正弦的關聯、兩向量所張出的平行四邊形面積 4.2 三向量所張出的平行六面體體積 ◎4.3 三階行列式的定義與性質	1.1 僅作簡單的概念性介紹 4.3 不含特殊技巧行列式題型
二、空間中的平面與直線	1.平面方程式 2.空間直線方程式 3.三元一次聯立方程組	1.1 平面的法向量、兩平面的夾角、點到平面的距離 2.1 直線的參數式、直線與平面的關係 ◎2.2 點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離 3.1 消去法 ◎3.2 三平面幾何關係的代數判定	
三、矩陣	1.線性方程組與矩陣 2.矩陣的運算 3.矩陣的應用 ◎4.平面上的線性變換與二階方陣	1.1 高斯消去法（含矩陣的列運算） 2.1 矩陣的加法、純量乘法、乘法 3.1 轉移矩陣、二階反方陣 4.1 伸縮、旋轉、鏡射、推移 4.2 線性變換的面積比	1.1 重點在於矩陣三角化的演算法 4.2 此處面積指兩向量所張出的平行四邊形面積
四、二次曲線	1.拋物線 2.橢圓 3.雙曲線	1.1 拋物線標準式 2.1 橢圓標準式（含平移與伸縮） 3.1 雙曲線標準式（含平移與伸縮）	不含斜或退化的二次曲線；不含直線與二次曲線的關係（指弦與切線）；不含圓錐曲線的光學性質

## 伍、實施要點

### 一、教材編寫

- (一) 應力求掌握本課綱設計的精神編寫教材，儘量配合課綱子題設計的先後來訂定章節，但在內容上則不必拘泥綱要內容編排的順序。為達成教材流暢性與完整性所新增的內容，可置於附錄。
- (二) 在編寫要領上，應注意下列事項：
1. 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接。教材應具時代性、前瞻性及國際性。
  2. 教材應以精緻與完備的出版品呈現。
  3. 教材應注意到銜接、統整和連結。
  4. 教材的呈現應循序漸進，適當鋪陳，引發學習動機，注意學生學習心理，在直觀與嚴謹之間取得平衡，並兼顧從特例到一般推理的必要。
  5. 教材應有足夠多的範例與習題。範例應具有意義並反映數學思考，在範例之後應有隨堂練習，在課文之後應有啟發深思的習題。習題要扣緊主題，在深度上由淺入深，不宜與教材內容有太大落差。範例與習題的妥適性可由下列的指標來判斷：
    - (1) 是否為無意義的人工化難題？
    - (2) 所謂生活化的問題是否符合常理？
    - (3) 是否屬於大學程度的題材，雖可用高中所學的方法解決，但仍屬困難？
  6. 範例與習題應注意與生活、其他學科及下列九大議題的連結：生命教育、性別平等、法治教育、人權教育、環保教育、永續發展、多元文化、消費者保護教育、海洋教育。
  7. 教師手冊要提供教師對教材進一步的認識，對課程深入的瞭解和最有效率的教法。教師手冊亦應提供相關的進階資訊供教師參考。
  8. 專有名詞應採用教育部最新編訂公布名詞。各專有名詞及外國人名應於索引中附原文。
- (三) 審查注意事項：教科書的審查應掌握課程綱要的內容、備註及其說明所呈現的精神，並依據上述教材編寫注意事項進行。審查時，應遵照國立編譯館所頒布的審訂規範，並尊重出版自由的精神。

### 二、教學進度

各校可配合學生學習情況，彈性調整教學進度。針對放棄學習的學生，應予適當的輔導。針對學習較慢的學生，應有以下補救措施：可依學習不足狀況開設基礎數學選修課程；可彈性調整學習進度，只要在學測前學完數學必修課即可；學習方式可採螺旋式，不一定要按課綱的章節順序學習；可依實際狀況彈性調整評量方式。針對學習較快的學生，則可提供進階選修課程，以激發其學習熱忱。

### 三、教學設備與資訊

為建構抽象思維的實體圖像，數學學科中心應研發電腦輔助教學範例（例如：以電腦協助講授函數圖形、立體幾何、解方程式和統計課程），並建立教學資訊平台，充分提供各項網路教學資訊予各校。

### 四、計算工具的使用

- (一) 在學生已熟練計算原理的情況下，為避免太多繁複計算降低學習效率，應

允許學生於學習及評量中適當地使用計算器。例如統計數據的計算可使用普通計算器，指數、對數函數及三角函數的求值則可使用科學計算器。

(二) 在學生熟練描點繪圖的情況下，可輔以電腦繪圖，加強其建立函數圖形的直觀。

## 五、教學評量

(一) 平時測驗的方式宜有彈性，要針對學生學習狀況設計適合其程度的評量方式。在評量時要給予充分的時間思考，並要求學生將過程寫下，以瞭解學生思考的步驟。測驗的題目應區分為基礎和進階兩類，依學生程度做適當的評量。

(二) 為導正學習文化，在實施全國性測驗評量時，應提供學生充分的思考時間，以避免學生為求快速解答而忽略數學思考的學習。同時題數不宜太少，以免為求鑑別度而將題目導引到難題化。程度上應從基礎題到進階題均勻分布。

相關評量單位應研究優良題型的評鑑指標，協助教學現場創造出優質的學習環境。

## 陸、附錄

數學 I、II、III 及 IV 的說明與範例。

### 數學 I：函數

數學 I 處理連續量相關的課題，包括度量連續量的實數，以及表現兩連續量關係的函數，函數也是數學與具體世界連結的媒介。近年來，由於許多學科的數量化與數學化的需求，使得各國的高中數學教育特別重視函數及其應用，在先進國家，學生除用描點繪圖外，還用電腦繪圖輔助函數的學習，以建立其函數與圖形的直觀連結。本次課綱修訂，也加強函數這個主題。在高一階段，學生要學習基本函數（多項式函數、指數、對數函數）的基本操作，認識其基本特徵與圖形以及基本的應用。因為其他學科普遍用到一次函數、二次函數，以及指數、對數函數，更應特別加強這些題材的學習。

#### 一、數與式

實數是度量連續量的符號。在第一章的「數與式」中，學習目標為建構直尺，也就是要學習實數的十進位表示法，以及處理數線上的幾何問題。

首先複習有理數系並延伸介紹循環小數，但此處僅需初步介紹循環小數為有理數，證明則留待極限的章節討論。藉由有理數的十進位表示法，導入介紹數線上實數的十進位表示法，即無限小數。此處僅需建立實數可由有限小數逼近的直觀，不需涉及實數的完備性觀念。至於 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明，則置於附錄。在數的學習中，要循序漸進地引領學生學習以文字替代具體數字的形式操作，包括展開、分解與化簡，以與國中的經驗連結，並作為學習函數的基礎。

其次由數線上的方程式複習變數的觀念，處理數線上的幾何問題，包括分點公式，以及與距離相關的方程式與不等式問題。

##### 1. 數與數線

##### 1.1 數線上的有理點及其十進位的表示法

透過有理數的相除意涵，讓學生發現有理數可以用有限小數或循環小數來表



示，此處讓學生操作分母為一位數的有理數即可。循環小數為有理數的證明，留待極限章節處理，此處僅需初步介紹。要告知學生一個實數為有理數的充分必要條件為該數的十進位表示法是有限小數或循環小數。

### 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係

實數與數線上的點有一一對應的關係，透過不斷作十等分的細分，直觀介紹實數可用有限或無限小數表示，並建立實數可用有限小數逼近的直觀。實數的操作包括絕對值、根數操作與實數大小的比較。

- $\sqrt{2}$  可表為無限小數。
- 絕對值的定義。
- 複習根式的運算與化簡：如  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ 、 $\sqrt{a^2} = |a|$ 、算幾不等式

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}。$$

- 數的大小比較。

### 1.3 乘法公式、分式與根式的運算

對文字符號所組成的代數式能進行展開、分解及化簡等形式運算。乘法公式及其逆運算（如：立方和、立方差），此處不要延伸為複雜的因式分解。

- 型如  $(a+b)^3$ 、 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 、 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 、 $(a+b+c)^2$ 、 $(1-x)(1+x+x^2)$  的展開式與逆運算，但不宜過度延伸。
- 不含雙十字交乘法如  $(x+y-1)(x-y+2)$  的因式分解。
- 不宜的公式： $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ 。
- 能化簡繁分式與根式，如：

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}、\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}、\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}、$$

$$\sqrt{x^2+x^{-2}+2} = x+x^{-1}。$$

## 2. 數線上的幾何

### 2.1 數線上兩點距離與分點公式

例如能算出介於  $a, b$  之間且與  $a, b$  距離的比為 2:3 的點  $x$ 。

### 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式

- 三角不等式： $|a+b| \leq |a|+|b|$ 。
- $|x-3| < 2$  且  $|x-1| < 1$  的解的範圍為  $1 < x < 2$ 。
- 求  $|x-1| < |2x-3|$  的解的範圍。

## 二、多項式函數

本章的重點是簡單多項式與多項式的除法。在第二章「多項式函數」裡，首先複習函數的概念以及一次與二次函數，作為與國中課程的銜接，並作適度延伸，強調函數的特徵、圖形與應用的連結。一次、二次函數是最基本的函數，要加強學習。在一次函數裡，學生要理解變化率的物理意涵，以及斜率的幾何意涵。在二次函數裡，學生要複習與延伸學習配方法、平移、極值、判別式和正定性（恆正性），能繪圖並能應用。在單項函數  $y = cx^n$ （ $n=1、2、3、4$ ）中，學生要能繪

圖、瞭解函數的奇偶性、單調性，並作函數圖形的平移。簡單多項式函數是本章的基礎，學生應該要熟練。

在一般多項式的應用中有兩個課題，一是多項式的求值，一是插值多項式。原則上多項式可以透過四則運算求值，也因為如此，多項式被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值。另外，多項式也被用來作為插值的工具。插值方法很重要，它用少量的數據表現連續型的資訊，展現數學的效率與精確性。

除法是處理多項式的核心方法。一般多項式透過與低次多項式的相比（即相除），可得出多項式的不同表現，並可用來求值。此處低次多項式是指型如  $(x-a)$ 、 $(x-a)(x-b)$ 、 $x^2+1$ 、 $x^2+x+1$  的一次與二次多項式。比如將多項式  $f(x)$  除以  $(x-a)$ ，餘式可得  $f(a)$ ；連續除以  $(x-a)$  可得  $f(x)$  的  $(x-a)$  幕方展開式，它可用來求  $f(x)$  在  $a$  附近的近似值。又如將  $f(x)$  分別除以  $(x-a)$ ， $(x-b)$ ，得餘式  $\alpha$ ， $\beta$ ，可用來表現通過  $(a,\alpha)$ ， $(b,\beta)$  的插值多項式，此插值多項式即為  $f(x)$  除以  $(x-a)(x-b)$  的餘式，此為數學化繁為簡的精神。在多項式方程式的除法課題裡，具體多項式的次數仍不宜超過五次，重點是學會除法的操作與化繁為簡的精神。餘式定理與因式定理是除法原理的推論。因式定理可用來證明插值多項式的唯一性。學生學到不超過三次的插值多項式即可，以避免繁瑣的計算。

多項式方程式的課題是求多項式的根。首先處理二次方程式的求根問題，包括判別式、根的公式解、根與係數關係，以及它們的應用。在二次方程式的複數根裡，介紹複數系，包括複數的四則運算、共軛複數，以及二次方程式的共軛複數根（虛根成對）。但由於複數平面以及複數的幾何意涵需要較成熟的數學素養，故此處暫不涉及，而留待高三選修數學甲 I 的三角函數章節再處理。二次以上的整係數多項式方程式可用簡單的因式分解（如平方差、立方和、立方差）或牛頓定理求其有理根。但此部份的多項式不宜太高次，首尾項的係數也不宜有太多因數，以避免繁複的操作；此段內容應避免學生誤會整係數多項式方程式的根都是有理數。一般多項式求實根的主要辦法是勘根定理，此處重點是以求  $n$  次方（實）根，以及低次多項式方程式的實根為主，前者是學習指數函數的先備知識。最後談一般實係數多項式的虛根成對定理，並介紹一般實係數多項式可分解為一次式與二次式乘積的代數基本定理。

多項式函數的圖形與多項式不等式的重點，主要是讓學生辨識到已分解的多項式函數的圖形特徵（包括零根位置、重根的意涵、函數值的正負），其中零根的位置與單項函數圖形的平移作連結，重根的意涵與單項函數的圖形作連結，函數值的正負與二次式的恆正性作連結。讓學生建立函數圖形與函數特徵的關聯是函數學習的重要內涵。函數圖形可在書上呈現，或以電腦繪圖展示。

### 1. 簡單多項式函數及其圖形

#### 1.1 一次函數：變化率（應用意涵，如速度）、斜率（幾何意涵）

- 介紹函數  $y = f(x)$  的符號及函數圖形。
- $y = mx + b = m(x - x_0)$  中  $m, x_0, b$  的幾何意涵，其中  $m$  在幾何上的意涵為斜率，在應用上的意涵表示  $y$  對  $x$  的變化率。

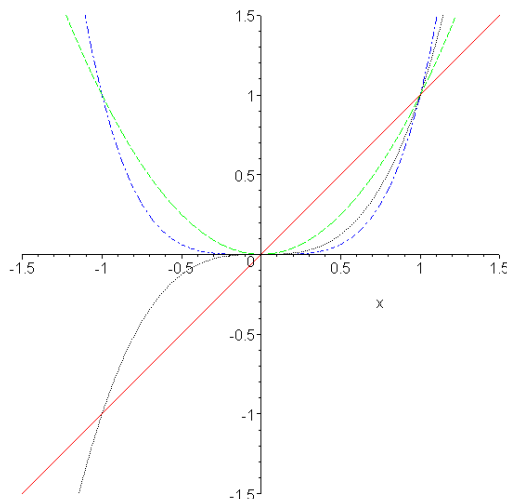
#### 1.2 二次函數：配方法、圖形、極值、判別式、正定性（恆正性）、應用實例

- 極值問題的應用，例如： $f(x) = x^2 + 2x + 3, -2 \leq x \leq 2$  的極值。
- 正定性：所謂二次式的正定性是指其函數值的恆正性，譬如判斷  $x^2 - x + 4$  恆為正。

- 能繪出各種不同型式的二次函數的圖形，如  $y = c(x-a)(x-b)$ 、  
 $y = ax^2 + bx + c$ 、 $y = a(x-h)^2 + k$ ，並能進行二次函數不同型式的轉換。

### 1.3 單項函數的奇偶性、單調性和圖形的平移

- 瞭解函數  $y = x^n$ ， $n = 1, 2, 3, 4$  在  $[-1.5, 1.5]$  的圖形。



- 當  $n$  為正整數時，型如  $y = cx^n$  函數的奇偶性與單調性。
- 瞭解  $c$  的正負、大小與函數  $y = cx^n$  圖形的關係。
- 利用平移畫出型如  $y = c(x-h)^n + k$  的圖形，但不涉及二項式展開的逆運算。

## 2. 多項式的運算與應用

### 2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用（含多項式函數的求值）

- $(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}) = x^n - a^n$ ， $n = 2, 3, 4$ 。
- $(x+a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$ 。
- 除法中的除式不宜太高次，以一次式和二次式為主。
- 透過連續的多項式綜合除法，求

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$  中的  $a, b, c, d$  與求  $f(1.01)$  的二位小數近似值。

- 求  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$  中的  $a, b, c, d$ 。
- $f(x)$  除以  $(x-a)(x-b)$  的餘式為通過  $(a, f(a)), (b, f(b))$  的插值多項式。
- 若  $f$  有  $a, b$  兩實根，則  $f$  可寫成  $f(x) = q(x)(x-a)(x-b)$  的型式。
- 透過因式定理證明插值多項式的唯一性。
- 設通過  $(1, 1), (2, 3), (3, 7)$  的多項式為  $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$ ，求  $a, b, c$  及  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

- 插值多項式：通過(11,3),(12,5),(13,8)的多項式可表示為

$$f(x) = 3 \times \frac{(x-12)(x-13)}{(11-12)(11-13)} + 5 \times \frac{(x-11)(x-13)}{(12-11)(12-13)} + 8 \times \frac{(x-11)(x-12)}{(13-11)(13-12)},$$

求  $f(11.5)$  的值。

- 此處暫不處理下面的題型：「設通過(1,1),(2,3),(3,7)的多項式為

$f(x) = a + bx + cx^2$ ，求  $a, b, c$ 。」此類題型將在數學 IV 的聯立方程組章節中處理。

### 3. 多項式方程式

#### 3.1 二次方程式的根與複數系（含複數根與複數的四則運算）

二次方程式的根包括判別式、公式解、根與係數關係及簡易分式方程式；複數系包括複數的引進（不引進複數平面與複數的幾何意涵，如：絕對值）、複數的四則運算，以及共軛複數。

- 複習  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解，含複數根。
- 根與係數關係：

設  $x^2 + 5x + 3 = 0$  的二根為  $\alpha$  與  $\beta$ ，求  $\alpha^2 + \beta^2$ 、 $\alpha^3 + \beta^3$ 。

- 簡易分式方程式（通分展開後為二次方程式），如： $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2}$ 。

#### 3.2 有理根判定法、勘根定理、 $\sqrt[n]{a}$ 的意義

本節談論的是一般實係數的多項式，整係數多項式的因式分解不必太過強調，以免學生誤會整係數多項式的根都是有理根。

- 有理根判定法：首尾項係數不宜有太多因數，以免過於繁複的運算。
- 勘根定理： $x^n = a$  的求實數解，其中  $a > 0$ 、求  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$  的實根。
- 正  $n$  次方根的存在唯一性證明。

#### 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理

- 證明虛根成對定理，並讓學生知道實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積的事實：

$$f(x) = k(x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_k)^{r_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \cdots (x^2 + b_mx + c_m)^{s_m}$$

其中二次式不可分解。

- 利用除法求  $f(x) = 5x^4 - 21x^3 + 30x^2 - 9x + 7$  在  $x = 2 + i$  的值。

### 4. 多項式函數的圖形與多項式不等式

#### 4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題

只談低次或已分解的多項式不等式問題，並能辨識函數圖形特徵（根的位置、重根、函數值正負的區間），但重根不宜超過三次，儘量多透過教科書的呈現或電腦繪圖協助學生建立圖形與函數的連結。此處不需延伸到複雜的分式不等式的問題。

- $(x-1)(x+2)^2(x-4) > 0$ 、 $(x-1)(x-2)^3(x^2+x+1) > 0$ 。
- $x^3 - 1 > 0$ 、 $x^4 - 2x^2 - 3 > 0$ 。
- 簡易分式不等式： $\frac{1}{x} < 0$ 、 $\frac{1}{x-1} < 1$ 、 $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 。

### 三、指數、對數函數

本章的重點為指數定律、對數定律及其應用。指數定律的學習由指數為整數、分數到實數，以數字、文字方式循序漸進，讓學生熟悉指數定律，並透過計算器的操作，建立 $10^x, x = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ 的數字感，並輔以生活上的實例。指數為實數的定義不必嚴格，直觀上僅需利用指數為有理數去逼近即可。

要介紹指數函數（底數 $a > 0, a \neq 1$ ）的圖形與性質，包括：值域、單調性（嚴格遞增、嚴格遞減）與凹凸性，這裡凹凸性僅做割弦在函數圖形上方的直觀介紹即可。主要的指數函數為 $2^x$ 及 $10^x$ 。

對數的內容包括： $x = \log_a b$ 的定義是 $a^x = b$ 、對數定律以及換底公式。換底公式是將一般底換成10為底，以配合後面對數表的使用。傳統上換底公式的題材常製造出許多難題，並無實用的意義，這類題材應予刪除。對數定律是處理指數方程式的核心方法。對數定律包括 $\log(xy) = \log x + \log y$ 、 $\log(x/y) = \log x - \log y$ 與 $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$ 。它將乘除問題化簡為加減問題，次方問題化簡為乘除問題。在介紹對數定律時，不要列出太多衍生的公式，以免打亂了上述化簡的核心思想。

對數函數要介紹對數函數的定義域、值域、單調性以及凹凸性，其中凹凸性僅作割弦在函數圖形下方的直觀介紹即可。關於一般底的對數函數，可透過換底公式換為以10為底的對數函數 $\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$ ，也就是一般底的對數函數只是 $y = \log x$ 在Y軸上的伸縮，故對數函數主要介紹 $y = \log x$ 為主。

指數、對數的應用包括：學習對數表、認識科學記號、利用對數表處理大、小數的乘除與次方問題、等比數列與級數、一般算幾不等式，以及處理指數方程式、指數不等式的應用問題。生活周遭與自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象，如人口成長、細胞分裂、放射性元素衰變、藥物代謝、複利等，或以指數方式度量的音量、音階、地震強度、酸鹼值等。透過這些實例引領學生學習以指數方程式或不等式建立數學模型。純人工化指對數方程式與指對數不等式問題則不宜過度延伸。

指數、對數的應用包括：學習對數表、認識科學記號、利用對數表處理大、小數的乘除與次方問題、等比數列與級數、一般算幾不等式，以及處理指數方程式、指數不等式的應用問題。生活周遭與自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象，如人口成長、細胞分裂、放射性元素衰變、藥物代謝、複利等，或以指數方式度量的音量、音階、地震強度、酸鹼值等。透過這些實例引領學生學習以指數方程式或不等式建立數學模型。純人工化指對數方程式與指對數不等式問題則不宜過度延伸。

指數、對數的應用包括：學習對數表、認識科學記號、利用對數表處理大、小數的乘除與次方問題、等比數列與級數、一般算幾不等式，以及處理指數方程式、指數不等式的應用問題。生活周遭與自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象，如人口成長、細胞分裂、放射性元素衰變、藥物代謝、複利等，或以指數方式度量的音量、音階、地震強度、酸鹼值等。透過這些實例引領學生學習以指數方程式或不等式建立數學模型。純人工化指對數方程式與指對數不等式問題則不宜過度延伸。

#### 1.指數

##### 1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律

- $n$ 次根數的操作： $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ ， $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}$ 。

- 指數為分數的指數函數的單調性， $10^{\frac{1}{3}} < 10^{\frac{1}{2}}$ 。

- 指數化簡不宜太過複雜或太人工化，下列題型不適宜：

化簡 $(x^{\frac{a}{a-b}})^{\frac{1}{c-a}} \cdot (x^{\frac{b}{b-c}})^{\frac{1}{a-b}} \cdot (x^{\frac{c}{c-a}})^{\frac{1}{b-c}}$ ；

若 $a^{2x} = 2 + \sqrt{3}$ ，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x} + \sqrt{6}}$ 的值。

- 指數為實數的定義不必嚴格，直觀上僅需利用指數為有理數去逼近即可。

## 2. 指數函數

### 2.1 介紹指數函數圖形與性質（含單調性、凹凸性）

這裡凹凸性僅做割弦在函數圖形上方的直觀介紹即可。主要的指數函數為  $2^x$  及  $10^x$ 。

## 3. 對數

### 3.1 對數的定義與對數定律

- 對數定律僅介紹： $\log(xy) = \log x + \log y$ ， $\log(x/y) = \log x - \log y$ ， $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$ 。不要列出太多衍生的公式，如

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b, (\log_a b)(\log_b c) = \log_a c, a^{\log_x b} = b^{\log_x a}。$$

### 3.2 換底公式： $\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$

換底公式是換成 10 為底的對數為主，以配合後面對數表的使用。傳統上換底公式常製造出許多難題，並無實用的價值，這類題材應予刪除。

## 4. 對數函數

### 4.1 介紹對數函數圖形與性質（含定義域、對數定律、單調性、凹凸性）

- 此處凹凸性僅作割弦在函數圖形下方的直觀介紹即可。
- $y = a^x$  等價於  $x = \log_a y$ 。
- $\log_a x = \frac{1}{\alpha} \log x$ ， $\alpha = \log a$ ，也就是對數函數的換底是在值域上的伸縮。
- 算幾不等式

$$\text{算幾不等式 } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ 等價於 } \frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right), \text{ 等式成立於 } a = b$$

此處的算幾不等式等價於對數函數的凹凸性，僅作直觀介紹，不用嚴格證明。

## 5. 指數與對數的應用

### 5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號

表尾差與內插法的概念相同，但內差法的適用範圍廣泛，故刪除表尾差的內容以內插法取代。

### 5.2 處理乘除與次方問題、算幾不等式

- 處理乘除與次方問題，如： $2^{100}$  為幾位數？ $(1.18)^{10}$  約為多少（有效數字小數點以下兩位）？

### 5.3 等比數列與等比級數

- 簡單介紹等比數列、等比級數，不含無窮等比級數。

### 5.4 由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題，如：複利、人口成長、細胞分裂、放射元素衰變、藥物代謝、貸款等問題。純人工化指數方程式與指數不等式問題則不宜過度延伸。

## 數學 II：有限數學

數學 II 處理與離散量相關的有限數學問題。二十世紀計算機的發明，提供人類處理大量數據的工具，促使許多學門進行數量化與數學化的革命。有限數學包括離散數學（數列與級數、排列組合）、離散的古典機率論，以及基本的數據分析，這些都是各學科進行量化分析所需的基本工具。雖然有限數學的課題仍是古典的內容，但因應時代的發展，應有新的視角，特別是它在計算機科學與統計科學方面新的應用，並避免操練傳統的人工化難題以及繁瑣的計算。

### 一、數列與級數

本章節作為有限數學的先備知識，主要是讓學生發現數列的規律性，歸納成公式，並用數學歸納法加以證明。核心的公式為一階線性遞迴關係。至於一階遞迴不等式是屬於分析方面題材，留待數學甲/乙 II 的極限章節中處理。級數部分包括基本的求和公式與  $\Sigma$  符號的操作。

#### 1. 數列

##### 1.1 發現數列的規律性

• 一階遞迴關係：由具體實例讓學生由前數項推測下一項，並歸納出遞迴關係，如  $a_{n+1} = a_n + d$ 、 $a_{n+1} = ra_n$ 、 $a_{n+1} = a_n + n$ 、 $a_{n+1} = a_n + n^2$ 、 $a_{n+1} = (n+1)a_n$ 。

1.2 數學歸納法：以驗證前述所發現的數列規律為主，含不等式的數學歸納法將在數學甲/乙 II 的「數列及其極限」章節中討論。

#### 2. 級數

##### 2.1 介紹 $\Sigma$ 符號及其基本操作

• 展開式與  $\Sigma$  型式的互換。

•  $\Sigma$  的性質： $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ ， $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ 。

• 換指標  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$ ，以一個  $\Sigma$  為限。

• 歸納出基本求和公式： $\sum_{k=1}^n k$ 、 $\sum_{k=1}^n k^2$ 、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  的公式，並用數學歸納法證明。

### 二、排列、組合

「排列組合」的定位為處理生活中常見的計數問題，並作為學習古典機率的準備。排列組合以及計數的問題，最基本的公式通常並不複雜，學生學習的困難常在於無法把文字敘述的題目，適當地「翻譯」與「對應」到該用的公式。學習翻譯與對應的同時，也應該強調分辨「計數對象是什麼」的重要性，也就是要弄清楚「什麼跟什麼是不同的物件」。這種將語文轉化為數學的題材，應在教材中詳細闡述，同時教師於課堂上也需按部就班引導學生，並讓學生多做閱讀練習，以建立學生在此方面的轉化能力。

過去在「排列組合」的教學上，常有許多刁鑽古怪的難題，有些題型的情境不合常理，有些是大學才需要學習，有些則是用到太多觀念（如「環狀排列」等），這類難題都應避免，以免降低了學習效率。學生應該只需掌握下列範例中的基本題型即可。

#### 1. 邏輯、集合與計數原理

1.1 簡單的邏輯概念：介紹「或」、「且」、「否定」及笛摩根定律。

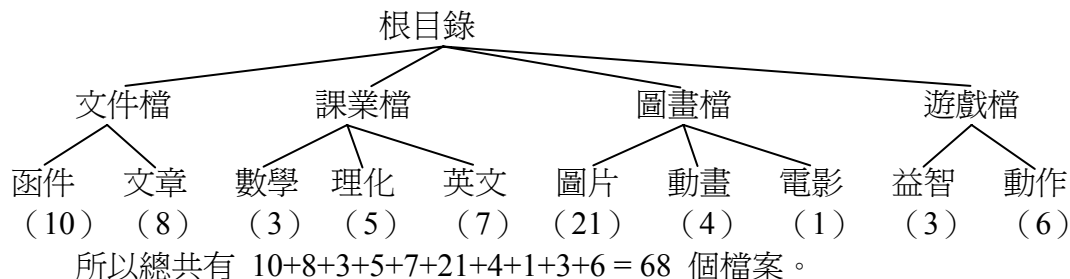
## 1.2 集合的定義、集合的表示法與操作

聯集、交集、補集、差集、乘積集合與文氏圖。

## 1.3 基本計數原理（含窮舉法，樹狀圖、一一對應原理）

集合元素的計數（應介紹符號  $|S|$ ，用以表示一個集合  $S$  的元素個數）。原始的計數仍然出自窮舉法，但可使用樹狀圖幫助組織資料，以達成計數目的。

- 電腦裡的檔案通常依照樹狀結構組織起來，例如（括弧中數字表示檔案個數）：



- 一一對應原理：在兩集合之間如果能建立一一對應，則兩集合的元素個數相等。例如有 51 個人參加網球單淘汰賽，就是說任何一位選手只要輸一場，就被淘汰出局。並且每一場比賽都一定有一位得勝，不允許有和局。在每一輪比賽中，將選手盡可能地配對相比。如果有奇數位選手，則暫時剩下一位。只要比賽進行足夠多次，最後就會有一位冠軍出現。請問總共要比賽幾場，才能產生冠軍？因為 51 不算是太大的數目，當然可以使用直接安排比賽程序得出答案。但是更能看出問題核心的辦法，是觀察出下面的一一對應。因為每一場比賽會產生唯一的失敗者，而且每位選手如果會失敗，也只會失敗一次，所以比賽的場次與失敗者之間有一個一一對應，也就是說比賽場數等於失敗者人數。因為最後只有冠軍一個人從來不曾失敗，所以一共剛好比賽 50 場。

## 1.4 加法原理、乘法原理、取捨原理

- 加法原理：假設  $A$  與  $B$  是不相交的有限集合，則  $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。
- 介紹  $A, B$  為兩集合時，乘積集合  $A \times B$  的定義和乘法原理： $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。
- 取捨原理只考慮最多三個集合間的取捨，令  $A, B, C$  為三個有限集合，則
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ 。
 另外可用文氏圖說明取捨原理。

經常看到把 Principle of Inclusion and Exclusion (PIE) 翻譯為「排容原理」，或「容斥原理」。但中文裡原來沒有「排容」或「容斥」這類習慣說法，且這些名詞無法明確表達這個數學概念的真正意涵。一般我們只有在傳統習慣的文辭中沒有恰當翻譯法時，才去生造或杜撰新名詞。其實 Inclusion and Exclusion 就是在做「取捨」，因此把 PIE 翻譯為「取捨原理」較為恰當。

## 2. 排列與組合

### 2.1 直線排列、重複排列

直線排列：

- $n$  個相異物件的排列數為階乘數  $n!$ 。  
（球與籃子模式：把編號是 1 到  $n$  的球，放入編號是 1 到  $n$  的籃子裡，每個籃子恰放一個球，放法總數為階乘數  $n!$ 。）
- 從  $n$  個元素的集合中，每次取出  $k$  個相異元素做排列，則總數為排列數



$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ 。(球與籃子模式：把編號是 1 到  $k$  的球，放入編號是 1 到  $n$

的籃子裡，每個籃子最多放一個球，放法總數為排列數  $P_k^n$ 。)

- 班上有 50 人，要選正、副班長各 1 人，共有多少種選法？  
重複排列：重複排列可看做是乘法原理的推廣。
- 從  $n$  個元素的集合中，每次取出  $k$  個元素做排列，允許重複取出同樣的元素，則總數為  $n^k$ 。  
(球與籃子模式：把編號是 1 到  $k$  的球，放入編號是 1 到  $n$  的籃子裡，每個籃子裡的球數沒有限制，放法總數為  $n^k$ 。)
- 三排組合號碼鎖，每排有 10 個數字，共有  $10^3$  種組合。
- 投銅板，出現正面記為 1，出現反面記為 0。若令集合  $A=\{0,1\}$ ，則投  $n$  次所有可能結果的集合為  $A^n = A \times A \times \dots \times A$  (共乘  $n$  次)，其元素個數為  $2^n$ 。

## 2.2 組合、重複組合

組合：由組合數的基本公式  $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，經簡單計算得出的式子，儘量

賦予選取物件式的組合解釋。

- 從  $n$  個元素的集合中每次取出  $k$  個相異元素，不同取法的總數是組合數  $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。
- 球與籃子模式：把  $k$  個沒有編號且不可分辨差異的球，放入編號是 1 到  $n$  的籃子裡，每個籃子最多放一個球，放法總數為組合數  $C_k^n$ 。  
重複組合：
- 從  $n$  個元素的集合中每次取出  $k$  個元素，允許重複取出同樣的元素，則不同取法的總數為重複組合數  $C_k^{n+k-1}$ 。
- 球與籃子模式：把  $k$  個沒有編號且不可分辨差異的球，放入編號是 1 到  $n$  的籃子裡，每個籃子裡的球數沒有限制，放法總數為重複組合數  $C_k^{n+k-1}$ 。
- 對於給定的  $n$  與  $k$ ，方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  的非負整數解總數也是重複組合數  $C_k^{n+k-1}$ 。

## 3. 二項式定理

二項式展開為二項分布的基礎，而二項分布為機率統計的一個核心概念。

### 3.1 以組合概念導出二項式定理、巴斯卡三角形

- 二項式定理：利用組合的概念推導出  $(x+y)^n$  展開式中一般項的形式，應處理生活中二項式展開的問題，不宜延伸做人工化的例題，如：求  $\left(x^2 + \frac{1}{x} + 1\right)^5$  中  $x$  的係數。
- 巴斯卡三角形。  
利用二項式定理所推導的各種公式，儘量賦予「有幾種不同選法」或「有幾種不同走法」的解釋，以增加學生對於組合的直觀認識。

### 三、機率

#### 1. 樣本空間與事件

##### 1.1 樣本空間與事件

藉由集合來說明幾個事件的同時發生、至少有一件發生、某事件未發生等狀況。

- 樣本空間為投銅板五次的所有可能，事件為「正面出現的次數為 3」。

#### 2. 機率的定義與性質

##### 2.1 古典機率的定義

藉由生活中的實例，以說明機率函數要滿足的基本條件。並證明機率函數的基本性質。

- 班上有 50 人，同學間有人生日相同的機率為何？

#### 3. 條件機率與貝氏定理

##### 3.1 條件機率、貝氏定理

- 某公司的產品分別由 A、B、C 工廠所提供，其中 A 工廠提供 40%，B 工廠提供 30%，C 工廠提供 30%，而 A 工廠的所生產的產品中有 5% 的瑕疵品，B 工廠的所生產的產品中有 10% 的瑕疵品、C 工廠的所生產的產品中有 8% 的瑕疵品，若從該公司的產品中發現一個瑕疵品，則此瑕疵品為 A 工廠所製造的機率為何？
- 某一檢查方法對檢驗某一疾病有 90% 的準確率，也就是說，如果患有該疾病的人做檢查，那麼有 90% 的機會會呈現陽性反應；如果沒有該疾病的人做檢查，也有 90% 的機會會呈現陰性反應。假設已知全國人口中有 2% 的人得患有該疾病，如果有一人以此檢查方法的檢查結果為陽性，那麼他罹患該病的機率為何？

### 四、數據分析

透過平移與伸縮將數據標準化，是數據分析的一個核心方法。在教學現場，學生可利用計算器進行數據標準化，以避免繁瑣的運算。

#### 1. 一維數據分析

##### 1.1 平均數、標準差、數據標準化（可以用計算器操作）

- 數據集中的趨勢，如：算術平均數： $\mu = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)$ ，幾何平均數： $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$  等。

- 數據分散的趨勢：標準差： $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 \right)}$ 。

- 說明一元二次多項式  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - x)^2$  的最小值為  $\sigma^2$ ，最小值發生在  $x = \mu$ 。

- $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$  稱為數據  $x_i$  的標準化。

## 2. 二維數據分析：

2.1 散佈圖、相關係數、最小平方法：要尋找兩量關係時，應先將兩量標準化，成爲中心均在 0 點的「無因次量」後，再進行兩量關係的分析。

- $(\hat{x}_k, \hat{y}_k), k = 1, 2, \dots, n$  爲標準化的數據，相關係數爲使得  $e(r) = \sum_{k=1}^n (\hat{y}_k - r\hat{x}_k)^2$  爲

最小的  $r$ ，即  $e(r) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i^2 - 2\hat{x}_i\hat{y}_i r + \hat{x}_i^2 r^2) = r^2 - 2(\sum_{i=1}^n \hat{x}_i\hat{y}_i)r + 1$  的最小值發生在

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i\hat{y}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2}。$$

- 迴歸直線  $\hat{y} = r\hat{x}$  爲使得  $e(r)$  爲最小的直線。
- 以實際數據和圖形操作最小平方法，其證明置於附錄。

## 數學 II 附錄

演算法雖是古老的課題，但在傳統的教學中並未加以重視。近五十年來計算機的發展，使得許多演算法可以透過計算機加以實視，因而凸顯了演算法的重要性。在本節中，只談兩個古典的演算法，即整數的輾轉相除法以及求多項式實根的二分逼近法。輾轉相除法是可不經因數分解而求二整數的最大公因數，特別是處理大數的問題。它是人類第一個遞迴的演算法，充份展現了除法化繁爲簡的精神。在教材上，可於附錄中以電腦程式語言或演算法形式語言呈現輾轉相除法。在二分逼近法中，學生應該學會迭代的思考方法，並可透過計算器實現此想法，初步認識極限逼近的歷程。因考量時數限制，故將此演算法內容置於附錄。應鼓勵學生用簡單的程式語言撰寫演算法，並在計算機上實現。

### 1. 演算法

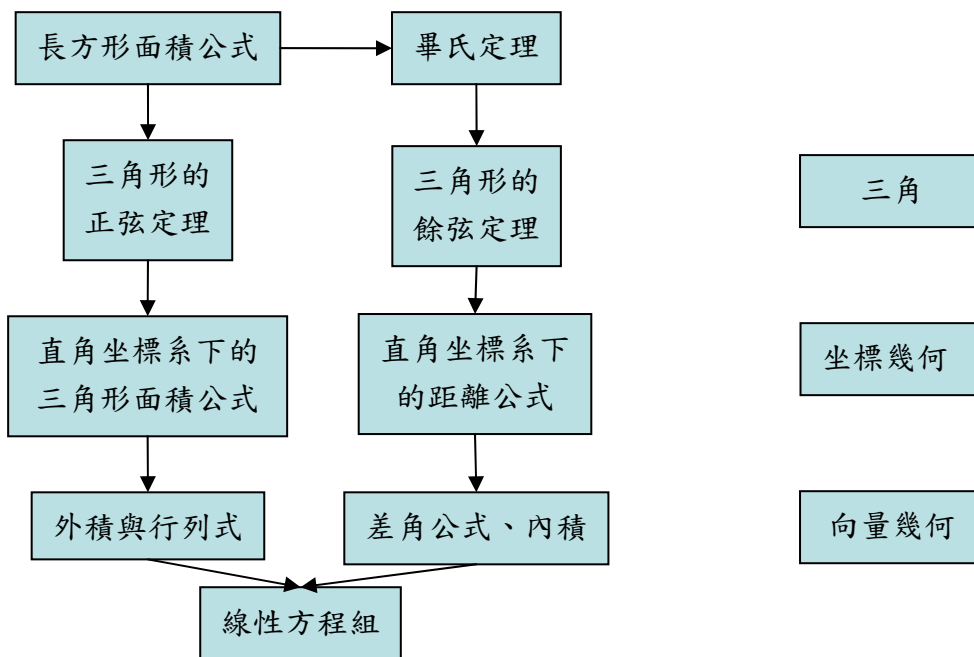
- 整數的輾轉相除法。
- 多項式求根的二分逼近法。

### 2. 最小平方法的證明

## 數學 III：坐標與向量幾何

坐標幾何是透過直角坐標系的架設，將幾何問題代數化，以代數的形式運算解決幾何問題，同時也賦予一般線性方程組的幾何意涵。線性方程組具有廣泛的應用，因此坐標幾何是許多應用問題的基礎。本冊的架構是先談三角與三角測量，再來談垂直與平行概念下的直線及其應用。有了三角的基礎後，可以進入具角度概念的向量幾何。透過向量的運算（如線性組合、內積、外積），處理幾何中長度、角度、面積等問題，並應用到解線性方程組。本冊內容與物理運動學的學習相輔相成。

坐標與向量幾何的脈絡如下：



## 一、三角

本章探討一般三角形的邊角關係及其應用。角度的概念由直角三角形的邊角關係切入，再延伸到極坐標下的正、餘弦。極坐標是以觀測者為中心的自然坐標系，正、餘弦函數則是極坐標轉換到直角坐標下的媒介。在極坐標的範疇，廣義角度只需談 $\pm 360^\circ$ ，向徑 $r \geq 0$ 的範圍即可；三角函數在超過 $360^\circ$ 的週期意涵留待三角函數章節時再處理。三角形的邊角關係先介紹銳角的正弦與餘弦，對廣義角三角函數的求值則透過參考角與補角關係來處理。學生應先透過特殊角的三角函數的求值，熟悉直角坐標與極坐標的變換。

三角形的邊角關係表現在正弦與餘弦定理，這是三角學的核心內容。在向量幾何課題當中，正弦定理發展成外積公式，餘弦定理發展成內積公式。一般來說，正、餘弦定理有兩種推導方法，一種是將三角形切割成兩個直角三角形，再透過直角三角形的面積公式及畢氏定理分別推得正弦、餘弦定理。另一種是用坐標幾何方式來處理，將三角形一個頂點置於原點，一邊置於 X 軸，然後再透過面積公式或距離公式來處理。事實上這兩種方法是等價的，但前者較為根本，後者則較易連結到差角公式與向量幾何。本課綱的設計是用前者處理銳角三角形的邊角關係，用後者處理鈍角三角形的邊角關係，以使學生能夠學到兩種處理方法。最後談一般三角形邊角關係的海龍公式，它是把正弦與餘弦定理結合起來的應用。

差角公式是計算兩線或兩向量交角的核心公式，其衍生公式如和角、倍角、半角公式，可用於三角函數的求值與三角測量。和差化積與積化和差的題材因涉及不同週期的三角函數的疊合，不需在高中時處理，故予刪除。

最後透過平面與立體的三角測量，讓學生學會三角的應用。三角測量應注意測量的策略與實用性，不宜出太困難的問題。

### 1. 直角三角形的邊角關係

#### 1.1 直角三角形的邊角關係（正弦、餘弦）、平方關係、餘角關係

- 只談正弦、餘弦的定義，以及正弦、餘弦的平方與餘角關係。

## 2. 廣義角與極坐標

### 2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切及平方關係與補角關係

- 引進參考角的概念，利用補角關係，將廣義角的三角函數求值化為銳角三角函數的求值。參考角  $\alpha$  的定義為廣義角  $\theta$  與 X 軸的銳夾角，如：

$\theta = \pm 150^\circ, \alpha = 30^\circ; \theta = \pm 225^\circ, \alpha = 45^\circ; \theta = \pm 300^\circ, \alpha = 60^\circ$ 。此處只需談正弦、餘弦和正切即可。

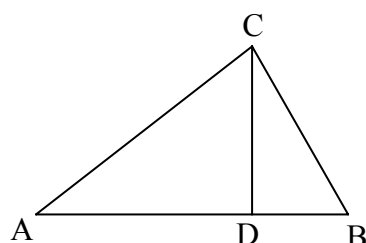
- 單位圓的坐標為  $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。由單位圓的坐標，易推得正弦、餘弦的補角關係。

### 2.2 直角坐標與極坐標的變換

極坐標中  $r, \theta$  的範圍為  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 360^\circ$

### 3. 正弦定理、餘弦定理

- 將三角形切割成兩個直角三角形，再透過直角三角形的面積公式及畢氏定理推得正弦、餘弦定理的證明。



$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

- 用坐標幾何方式來處理一般三角形的正弦、餘弦定理，例如以下三個定理。

- 面積與正弦定理：將  $\triangle ABC$  的 A 點置於原點，B 置於  $(c, 0)$ ，則 C 點置於

$(b \cos A, b \sin A)$ ，由面積公式可得

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} c \cdot b \sin A$$

同理可得  $\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C。$$

- 長度與餘弦定理：將  $\triangle ABC$  的 A 點置於原點，B 置於  $(c, 0)$ ，則 C 點的坐標為  $(b \cos A, b \sin A)$ ，由距離公式得

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A。$$

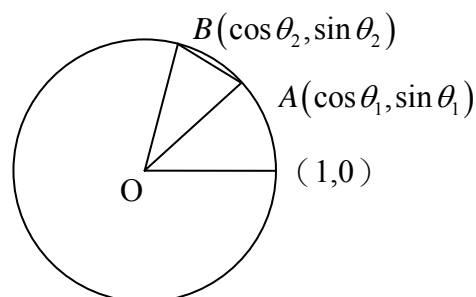
- 海龍公式。

### 4. 差角公式： $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$

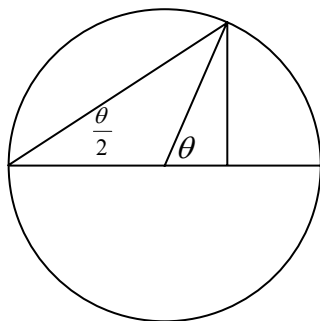
#### 4.1 差角、和角、倍角、半角公式

- 由餘弦定理的角度來看，差角公式較為根本且自然。由複數的極式來看，和角公式則較自然，此處的切入點為餘弦定理，故先介紹差角公式。

- 差角公式的證明：設 A, B 的坐標分別為  $(\cos \theta_1, \sin \theta_1), (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ ，應用餘弦定理於  $\triangle OAB$ ，可得  $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$ 。



- 和角、倍角、半角公式：包括  $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ 、 $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ 、 $\tan(\theta_1 + \theta_2)$ 、 $\cos 2\theta$ 、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ 、 $\sin \frac{\theta}{2}$ 。



- 求  $\cos 15^\circ$  的值。

## 5. 三角測量

三角測量應注意測量的策略及其實用性。

### 5.1 三角函數值表

在教學過程中可複習內插法。

### 5.2 平面與立體測量

## 二、直線與圓

本章先探討在垂直與平行概念下的直線方程式及其應用。直線的型式主要談點斜式，其他型式如斜截式、兩點式等不需另立名稱，可在應用時推導。不要讓學生背太多公式，而是要讓他們多練習推演，在反覆推演的練習中，自然會熟悉斜截式與兩點式。在兩線關係中，先談平行與垂直關係，如過一點垂直或平行於另一給定直線的直線方程式。其次談兩聯立方程式的幾何意涵（相交、平行），以及一些幾何與物理的應用，如外心、反射、鏡射等問題。在線性規劃這一節裡，將直線與具體世界做連結，可使學生體認到數學的應用性與普遍性。過去教材中分點公式的相關題材不在此討論，留待平面向量時再一併處理。

本章第二部分探討圓與直線的關係，透過解二元一次與二元二次聯立方程式，判斷圓與直線的相割、相切或不相交等關係。

### 1. 直線方程式及其圖形

#### 1.1 點斜式

其他型式如兩點式不需特別提及公式，可在例題中推導。

#### 1.2 兩線關係（垂直、平行、相交）、聯立方程式

- 過直線外一點與該直線平行、垂直的直線方程式。

### 2. 線性規劃

#### 2.1 二元一次不等式

能夠在坐標平面上標示滿足二元一次不等式的區域。

#### 2.2 線性規劃（目標函數為一次式）

學生應了解平行直線系  $ax + by = k$ 。線性規劃中目標函數限為一次式。

### 3. 圓與直線的關係

#### 3.1 圓的方程式

#### 3.2 圓與直線的相切、相割、不相交的關係及其代數判定

代數判定是指圓與直線的聯立方程式有重根解（相切）、兩相異解（相割）、無實數解（不相交）。

### 三、平面向量

物理上用向量的表現力與速度。向量是只有長度、方向意涵，而不管起始點的抽象符號。由幾何角度而言，用坐標幾何探討幾何性質時，應與所架設坐標系的原點所在何處無關，這正符合向量與起始點無關的概念。因此向量成為探討平面與空間幾何自然且精簡的語言。

向量概念與運算要將有向線段的意涵與位置向量的坐標意涵緊密結合。位置向量所形成的向量空間具有代數運算的結構，即線性組合、內積與外積。它就如同實數系般，是平面與空間至精至簡的表現，可將幾何問題代數化，也可將線性方程組的問題賦予幾何意涵，是學生未來學習線性代數、多變量微積分、向量分析和多變量統計分析的基礎。因此，位置向量的線性組合、內積與外積是向量幾何的重點。

平面向量的線性組合題材包括向量的合成與分解。向量的合成包括分點公式、直線的參數式、以及兩向量所張出的平行四邊形。平面上的任意向量可分解為兩特定不平行向量的線性組合。向量的分解應與二元一次聯立方程組相結合。

內積與外積是在直角坐標系下，兩單位向量夾角的餘弦與正弦的代數表現。在二維時，外積指的就是行列式。事實上，給定兩位置向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，經由餘弦定理計算其終點距離，可得  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ ，經由正弦定理計算其所張平行四邊形面積，可得  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = a_1b_2 - a_2b_1$ ，左端是具幾何表現的投影與高，右端展現代數的雙線性、對稱性與反對稱性。這兩個公式是向量幾何的核心公式。

內積的應用包括兩向量的直交化(將一向量分解成平行與垂直另一向量的兩個分量)、直線的法向量、點與直線的距離、直線與圓的關係(柯西不等式的應用)、兩直線的夾角和兩直線垂直的判定等。

行列式的應用包括面積的計算與兩直線平行的判定。二階行列式應與二元一次聯立方程組連結。二元一次聯立方程組 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 有兩個意涵，即兩直線

關係與線性組合  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 。其有解的判定為  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  所決定的行列式不等於 0，代表兩直線不平行，或兩行向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不平行。其公式解為克拉瑪公式。

#### 1. 平面向量的表示法

##### 1.1 幾何表示、坐標表示，加減法、係數乘法

向量為有向線段的幾何表示法。

- 證明簡單平面幾何的性質，如三角形兩邊中點連線定理。
- 向量為位置向量的坐標表示法，包括橫式與直式。

##### 1.2 線性組合、平面上的直線參數式

向量的合成：分點公式、三角形的重心、內心。

- 直線的參數式與直線上的運動。
- 能在平面上標示出  $\left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$  的區域。
- 向量的分解，如將  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  分解為  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  的線性組合。

#### 2. 平面向量的內積

##### 2.1 內積與餘弦定理的關聯、正射影與高、柯西不等式

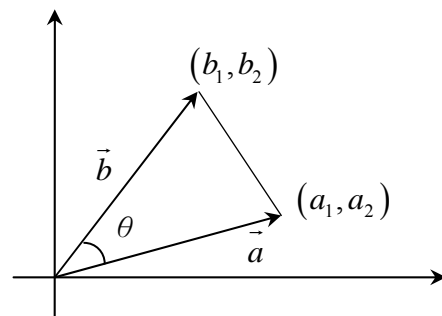
- 內積與餘弦定理

給定  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$

由餘弦定理得

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

展開可得  $a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ，此式右端反映幾何的角度，左端則為簡單的代數運算。因此將左端定義為  $\vec{a}, \vec{b}$  的內積，以符號  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  表示。亦即向量內積為餘弦定理在向量幾何下的代數表現。向量內積具有下列代數性質：



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \cdot \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \cdot \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \cdot$$

- 平行四邊形相關定理的證明。
- 柯西不等式： $|ax + by| \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ ，可處理圓與直線關係。
- 三角不等式： $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- 兩向量的直交化：將向量 (4, 5) 分解為與向量 (1, 2) 垂直與平行的兩個分量。
- 三角形的外心。

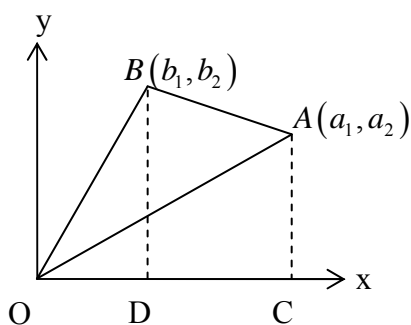
## 2.2 點到直線的距離、兩向量垂直的判定

### 3. 面積與二階行列式

#### 3.1 面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定

- 三角形面積的行列式公式：面積公式可採下列兩種方法切入：

1. 三角形  $\triangle OAB$ ， $O(0,0)$ 、 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$



$$\begin{aligned} \triangle OAB \text{面積} &= \frac{1}{2}b_1a_2 + \frac{1}{2}(a_2 + b_2)(a_1 - b_1) - \frac{1}{2}a_1a_2 \\ &= \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

2. 由  $\vec{a}, \vec{b}$  向量所張開的三角形面積

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| \end{aligned}$$

- 行列式的性質  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ，

$$\begin{vmatrix} ca_1 & b_1 \\ ca_2 & b_2 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \cdot$$



### 3.2 兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式

- 考慮聯立方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，其幾何關係是指兩線相交、平行或重合，其線性組合關係是指  $\vec{c}$  可否表現為  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的線性組合，其代數判定是指  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  所形成的行列式是否為 0。
- 二階克拉瑪公式。

## 數學 IV：線性代數

### 一、空間向量

首先介紹空間中的線、面及其相互關係，如垂直、平行與相交。此部分僅需作簡單的概念性介紹。其次介紹直角坐標系以及距離公式。距離公式是三維空間的畢氏定理，是空間幾何的基石。

空間向量的鋪陳與平面向量大致相同，包括線性組合、內積與外積，以及三元一次聯立方程組的應用。空間向量的線性組合，包括特殊點的定位。

空間中兩向量的內積是其夾角的餘弦在直角坐標系下的表現，具雙線性與交換性。內積的應用包括兩向量的直交化（正射影、高、柯西不等式）、平面的法向量、兩平面的夾角、點與面的距離、以及兩向量垂直的判定。

空間中兩向量的外積是其夾角的正弦以及公垂向量在直角坐標系下的代數表現，具雙線性與反對稱性。外積的主要應用包括，計算兩向量所張出的平行四邊形的面積、求兩向量所張出的平面方程式、以及求兩歪斜線的距離。

體積是空間幾何的另一主題。在介紹體積時，要先說明平行六面體的體積公式為底面積乘以高，再介紹三階行列式的體積公式。行列式要與三元一次聯立方程組的幾何意涵相結合，即行列式不等於 0 對應於三平面交於一點，或三行向量所形成的平行六面體體積不為 0。

#### 1. 空間概念

##### 1.1 空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係

#### 2. 空間向量的坐標表示法

##### 2.1 空間坐標系：點坐標、距離公式

##### 2.2 空間向量的加減法、係數乘法，線性組合

###### 分點公式

- 能在空間坐標中標示出  $\{(1, 2, 3) + t(0, 1, -1) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  的線段。
- 能在空間坐標中標示出  $\{s(1, 2, 3) + t(0, 1, -1) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\}$  的區域。

#### 3. 空間向量的內積

##### 3.1 內積與餘弦定理、兩向量的直交化、柯西不等式

給定兩位置向量  $(a_1, a_2, a_3)$ 、 $(b_1, b_2, b_3)$ ，經由餘弦定理計算其終點距離得：

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ，由此定義  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的內積為  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ，亦即向量內積為餘弦定理在向量幾何下的代數表現。

#### 4. 外積、體積與行列式

##### 4.1 外積與正弦的關聯，兩向量所張出的平行四邊形面積

- 兩向量的公垂向量。
- 空間中兩向量所張出的平行四邊形面積

$$A^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2。$$

#### 4.2 三向量所張出的平行六面體體積

- 空間中平行六面體體積為底面積乘以高。
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  三向量所形成平行六面體的體積為  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ 。

#### ◎4.3 三階行列式的定義與性質

- 三階行列式與平行六面體的體積。
- 行列式的性質與降階法。
- 行列式的應用：三角形面積、三線共點、三階克拉瑪公式，但此部分不宜過度延伸。

- 不宜含特殊技巧的行列式題型，如：
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ba & ca \\ ab & b^2+1 & cb \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}，$$

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}。$$

## 二、空間中的平面與直線

### 1. 平面方程式

#### 1.1 平面的法向量、兩平面的夾角、點到平面的距離

### 2. 空間直線方程式

#### 2.1 直線的參數式、直線與平面的關係

直線的參數式、點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離、直線與平面的關係

- 判別直線  $L: \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$  與平面  $E: 2x + y - z = 3$  的關係。

#### ◎2.2 點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離

### 3. 三元一次聯立方程組

#### 3.1 加減消去法、代入消去法

- 求插值多項式的係數。
- 求過三點的圓方程式。

#### ◎3.2 三平面幾何關係的代數判定

- 考慮三元一次聯立方程組 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
，探討其三平面關係的意涵

(三平面交於一點、三平面交於一線、三平面沒有共同交點等)、線性組合的意涵 ( $\vec{d}$  是否可表現成  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  的線性組合) 以及代數判定 ( $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  所決定的行列式是否為 0)。

### 三、矩陣

矩陣是線性代數、離散數學、多變量微積分、多變量統計分析的基本工具，自然組與社會組的學生都需要。

矩陣的介紹可由一般線性方程組切入，介紹高斯消去法，並配合實用的例子。其次介紹一般矩陣的加法、純量乘法與乘法。矩陣的應用則介紹轉移矩陣與二階反方陣，此部分的學習應與線性組合相連結。最後介紹二階方陣的線性變換意涵。

#### 1. 線性方程組與矩陣

高斯消去法（含矩陣的列運算）。

#### 2. 矩陣的運算

##### 2.1 矩陣的加法、純量乘法、乘法

- 含方陣與行矩陣的乘法（不應談特徵方程式及 Caley-Hamilton 定理）。

#### 3. 矩陣的應用

##### 3.1 轉移矩陣、二階反方陣

- 轉移矩陣學應用實例。
- 二階反方陣須與解聯立方程組作連結。

#### ◎4. 平面上的線性變換與二階方陣

##### 4.1 伸縮、旋轉、鏡射、推移

##### 4.2 線性變換的面積比

行列式為線性變換面積比的意涵，此處面積指兩向量所張出的平行四邊形面積。

- 令  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $A$  將  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  分別映射到  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。
- 求將  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  分別映射到  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  的線性變換的矩陣。

### 四、二次曲線

平面解析幾何處理平面上的一般曲線，最簡單的曲線是二次曲線。在此章介紹橢圓、雙曲線、拋物線的標準式，以及相對應的焦點、對稱軸、漸近線和拋物線的準線。

從二次曲線的定義（介紹焦點、準線），推得以原點為中心的二次曲線的標準式，但不處理傾斜與退化型的二次曲線。此處目的是讓學生熟悉根式的操作與配方法，並能繪製二次曲線的圖形。此外，透過平移與伸縮，讓學生認識一般二次曲線都可以化簡成標準式。不談一般二次曲線與直線的關係（包括弦與切線），因此也不談焦弦，不探討圓錐曲線的光學性質。

## 1. 拋物線

### 1.1 拋物線的標準式

拋物線： $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = |y + c|$ 。

- 介紹拋物線的各要素：頂點、焦點、準線、對稱軸。

## 2. 橢圓

### 2.1 橢圓的標準式

橢圓： $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$ 。

- 介紹橢圓的各要素：頂點、中心、焦點、長軸、短軸。
- 圖形的平移：

透過  $\begin{cases} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{cases}$ ，了解  $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$  的圖形，是  $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$  的圖形的平移。

- 圖形的伸縮：中心在原點的二次曲線的伸縮及所導出的二次曲線系

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$  的圖形的伸縮，也就是對標準式的伸縮。此處用到二次式的齊次性。透過  $\bar{x} = \frac{x}{t}, \bar{y} = \frac{y}{t}$ ，了解  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2$  的圖形，是  $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$  的圖形的伸縮。

- 能透過配方法將  $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$  化成

$$a(x - h)^2 + c(y - k)^2 = ah^2 + ck^2 - f。$$

## 3. 雙曲線

### 3.1 雙曲線的標準式

雙曲線： $\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a$ 。

- 介紹雙曲線的各要素：頂點、中心、焦點、實軸、共軛軸、漸近線。
- 介紹雙曲線的共軛雙曲線。
- 介紹雙曲線圖形的平移與伸縮。