一題多解之趣：求兩變數平方和的最小值

黃俊瑋、陳政宏[*]

臺北市立和平高中數學教師、[*]臺北市立永春高中數學教師

一、前言

一題多解是數學解題當中相當有趣的面向，每每與數學同好或讀書會伙伴討論數學問題時，總能看見解題思路的桃花源。特別是求最大最小值相關問題，只要能運用巧思，腦袋轉個彎將式子適當地調整或變形，又或者換個角度換個觀點切入，往往就能蹦出令人驚豔的新解法。本文將以下這道常見的求極值問題為例：

設 a , b 為實數，求函數 $f(a,b)=(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2$ 最小值

它是關於兩個變數欲求最小值的問題。這個看似平凡的問題，在大家的討論之中，竟然能找出 12 種解題的方法，以下，筆者便簡單分享這些解題方法。

二、12 種方法

當我們遇到要求最小值的問題，常見的做法包含配方法、判別式法及微分法：

方法一：配方法

將原式配方：

$$
\begin{aligned}
f(a,b)&=(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2\\
&=14a^2+3b^2+12ab-26a-12b+14\\
&=3(4a^2+4ab+b^2)+(2a^2-26a-12b+14)\\
&=3[(2a+b)^2-4(2a+b)+4]+(2a^2-2a+2)\\
&=3(2a+b-2)^2+2(a^2-a+\frac{1}{4})+\frac{3}{2}\\
&=3(2a+b-2)^2+2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

當滿足

$$
\begin{cases}
2a+b-2=0\\
a-\dfrac{1}{2}=0
\end{cases}
$$

時，原式有最小值，即當 $(a,b)=(\frac{1}{2},1)$ 時， $f(a,b)$ 有最小值 $\frac{3}{2}$ 。

方法二：二次函數判別式法

令

$$f(a,b)=(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2=k$$

展開整理得

$$14a^2+3b^2+12ab-26a-12b+14-k=0$$

可化為以a為變數的二次方程式

$$14a^2+(12b-26)a+3b^2-12b+14-k=0$$

由題意知，a為實數，表示此方程式有實根，所以其判別式大於等於0，即

$$(12b-26)^2-4\cdot14\cdot(3b^2-12b+14-k)\geq0\text{ ，}$$

展開得

$$36b^2-156b+169-42b^2+168b-196+14k\geq0\text{ ，}$$

整理得

$$14k\geq6b^2-12b+27\text{ ，}$$

此時，

$$14k\geq6b^2-12b+27=6(b-1)^2+21\geq21\text{ ，}$$

由上式可知，當$b=1$時，$k\geq\dfrac{3}{2}$，即函數$f(a,b)$的最小值為$\dfrac{3}{2}$。

方法三：偏微分法

本問題中的函數含兩個未變數，易聯連想使用偏微分來處理。首先，對變數a,b分別作偏微分：

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=2(a+b-2)\cdot1+2(2a+b-1)\cdot2+2(3a+b-3)\cdot3$$
$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=2(a+b-2)\cdot1+2(2a+b-1)\cdot1+2(3a+b-3)\cdot1$$

整理得

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}=28a+12b-26$$
$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=12a+6b-12$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 28a + 12b - 26 = 0 \\ \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 12a + 6b - 12 = 0 \end{cases}$$

解得 $(a,b) = (\frac{1}{2},1)$ ，此為極值點。

又

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial^2 a} = 28, \frac{\partial f(a,b)}{\partial a \partial b} = 12, \frac{\partial f(a,b)}{\partial b \partial a} = 12, \frac{\partial f(a,b)}{\partial^2 b} = 6 \text{ ，}$$

代入可得：

$$\frac{\partial f(\frac{1}{2},1)}{\partial^2 a} = 28, \frac{\partial f(\frac{1}{2},1)}{\partial a \partial b} = 12, \frac{\partial f(\frac{1}{2},1)}{\partial b \partial a} = 12, \frac{\partial f(\frac{1}{2},1)}{\partial^2 b} = 6$$

檢查

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial^2 a} = 28 > 0 \text{ 且 } \Delta = \begin{vmatrix} 28 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} > 0 \text{ ，}$$

由二階導函數檢定可知，當 $(a,b) = (\frac{1}{2},1)$ 時，函數 $f(a,b)$ 有最小值為 $\frac{3}{2}$ 。

除了上述的三種方法，遇到求平方和的最小值，也容易想到柯西不等式，如果將此題的變數做點轉換會更明顯。例如，令

$$\begin{cases} x = a + b - 2 & \cdots(1) \\ y = 2a + b - 1 & \cdots(2) \\ z = 3a + b - 3 & \cdots(3) \end{cases} \text{ ，}$$

由(1)、(2)式可計算出

$$\begin{cases} a = -x + y + 1 \\ b = 2x - y + 3 \end{cases} ,$$

代入(3)式可得 $x - 2y + z = 3$ 。因此，此問題可轉換成下列題目：

已知 $x, y, z \in R$ ，且滿足 $x - 2y + z = 3$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值

若以原問題的 a 、 b 來配柯西不等式的話，可得到：

方法四：柯西不等式

$$(-3)^2 \le [(a+b-2)^2 + (2a+b-1)^2 + (3a+b-3)^2][(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]$$

可得

$$\frac{9}{6}\le[(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2]\text{，}$$

即所求最小值為$\dfrac{3}{2}$。

如果進一步引入幾何觀點重新思考新題幹：

已知$x,y,z\in R$，且滿足$x-2y+z=3$，求$x^2+y^2+z^2$的最小值

則可將題意視為求平面上$x-2y+z=3$一動點，到原點$(0,0,0)$最短距離的平方：

方法五：

利用點到平面的距離公式得：

原點$(0,0,0)$到平面$x-2y+z=3$距離為$\dfrac{|0-2\times0+0-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

其平方為$\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{3}{2}$即為所求最小值。

除了上述幾何方法外，若將原題目中的式子

$$(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2$$

視為距離之平方，則可以將此問題再轉換成求「空間中兩條歪斜線的距離」之平方，即：

求兩直線$L_1:\begin{cases}x=a\\y=2a,a\in R\\z=3a\end{cases}$與$L_2:\begin{cases}x=-b+2\\y=-b+1,b\in R\\z=-b+3\end{cases}$最短距離的平方

如此的話，又可發展出另外四種常見的做法：

方法六：

先求出包含 L_1 且與 L_2 平行的平面 $E: x-2y+z=0$，此時點 $(2,1,3)$ 到平面 E 的距離的平方即為所求。[1]

$$d(P,L)=\frac{|2-2\times 1+3-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\ ,$$

即 $\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{3}{2}$ 為所求。

方法七：

欲求「空間中兩條歪斜線的距離」時，也可以利用兩參數式假設出公垂線段與兩直線之交點 $P(a,2a,3a)$ 與 $Q(-b+2,-b+1,-b+3)$，再利用向量垂直內積等於 0 的概念，由 $\overrightarrow{PQ}\perp L_1$ 以及 $\overrightarrow{PQ}\perp L_2$ 得到聯立方程式：$\begin{cases}14a+6b-13=0\\ 6a+3b-6=0\end{cases}$，再求解出 $(a,b)=(\frac{1}{2},1)$，代入得兩交點 $P(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$ 與 $Q(1,0,2)$，則 $\overline{PQ}$ 長的平方即為所求。

方法八：

處理兩歪斜線距離時，除了教科書中常用的方法五與方法六之外，也可以利用下述手法：利用 L_1與L_2 上的點 $P_1:(0,0,0)$ 與 $P_2:(2,1,3)$ 造出向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$，此向量在 L_1與L_2 兩方向向量的外積向量上的投影長之平方即為所求。

因此，先求出兩直線方向向量 $\overrightarrow{L_1}=(1,2,3)$ 與 $\overrightarrow{L_2}=(-1,-1,-1)$ 的外積為 $(1,-2,1)$，接著，利用正射影公式求出正射影向量為 $\frac{1}{2}(1,-2,1)$，其長度為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 即為投影長，再平方得 $\frac{3}{2}$ 即為所求。

[1] 亦可寫包含 L_2 且與 L_1 平行的平面 F，再求點 $(0,0,0)$ 到平面 F 的距離平方。

方法九：

利用 L_1與L_2 上的點 $P_1(0,0,0)$ 與 $P_2(2,1,3)$ 造出向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$ ，則兩歪斜線距離即為向量 $\overrightarrow{L_1}=(1,2,3)$ 、$\overrightarrow{L_2}=(-1,-1,-1)$ 以及 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 三向量所張成平行六面體的高，其中 $\overrightarrow{L_1}=(1,2,3)$ 、$\overrightarrow{L_2}=(-1,-1,-1)$ 所張成之平行四邊形為底面。

此時，我們可以先利用公式求得平行六面體的體積，再除以平行四邊形面積即為高，而高的平方為所求。[2]

因此，先利用平面六面體的體積公式得：$V=\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}\right|=3$

接著，求出 $\overrightarrow{L_1}=(1,2,3)$ 與 $\overrightarrow{L_2}=(-1,-1,-1)$ 的外積 $(1,-2,1)$ ，此兩向量外積之長 $\sqrt{6}$ 即為它們所張成平行四邊形的面積。故所求平面六面體的高為 $\frac{3}{\sqrt{6}}$，其平方 $\frac{3}{2}$ 即為所求。

除了可將原問題，轉換看成求空間中兩歪斜線

$$L_1:\begin{cases} x=a \\ y=2a, a\in R \\ z=3a \end{cases}$$

與

$$L_2:\begin{cases} x=-b+2 \\ y=-b+1, b\in R \\ z=-b+3 \end{cases}$$

的距離平方外，若引入空間中平面方程式的參數式，[3]同樣也可以求得本問題答案：

---

[2] 求平行六面體體積常見的方法，又有向量外積及三階行列式兩種，讀者可自行試試看。

[3] 此即方法五的另一種寫法，但空間中的平面方程式的參數式，目前的高中課程中並未提及，讀者可自行斟酌使用。

方法十：視為點到平面之距離平方

原函數 $f(a,b)=(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2$ 可視為

$$點\ P(2,1,3)\ 到平面\ E:\begin{cases} x=a+b \\ y=2a+b, a,b\in R \\ z=3a+b \end{cases} 的距離平方。$$

亦即原式可視為點 $P(2,1,3)$ 到平面 $E: x-2y+z=0$ 的距離平方。

這時，只要利用點到平面的距離公式，再將距離平方即為所求，即

$$d(P,L)=\frac{|2-2\times1+3-0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\Rightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{3}{2}\ 。$$

觀察此問題的式子，不難發現它與「最小平方法」的概念有關。原問題的函數

$$f(a,b)=(a+b-2)^2+(2a+b-1)^2+(3a+b-3)^2$$

可視為：

求平面上三個點 $(1,2),(2,1),(3,3)$ 與直線 $y=ax+b$ 的殘差平方和

因此，我們又有另外兩種解題方法：

方法十一：視為殘差平方和

當 $y=ax+b$ 視為迴歸直線時，使得殘差平方和為最小。故先求出三點 $(1,2),(2,1),(3,3)$ 的迴歸直線為 $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$，再求出此時的殘差平方和 $\frac{3}{2}$ 即為所求。

方法十二：線性代數-矩陣求迴歸直線的係數法

令 $X=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$，則迴歸直線的係數

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=(X^TX)^{-1}X^TY=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

即當 $(a,b)=(\frac{1}{2},1)$ 時，原函數有最小值 $\frac{3}{2}$ 。

三、結語

本文所討論的問題是一道求雙變數函數最小值的問題。我們除了利用傳統的配方法、偏微分法、判別式法與柯西不等式之外，也引入幾何觀點重新看此代數關係式。一方面可將原式看成「兩歪斜線的距離」，這時就可以引入空間中直線相關概念來處理，亦可看成點到平面的距離。最後，「距離平方和」也讓我們聯想到使用統計中的最小平方法。

讀者也許會好奇，這個問題只有這 12 種作法嗎？應當不只！筆者在此僅拋磚引玉，嘗試從各種不同的觀點看此問題，每每將題目「換句話說」之後，就能再創造出許多新方法。喜歡一題多解的讀者們，若能再發現第十三種、第十四種…的作法，也歡迎能一起討論與交流。