

普通高級中學選修科目「數學」課程綱要

壹、課程目標

選修數學提供學生適才適性的學習機會，針對不同學生的需要，選修課程共分四類：標準課程、基礎課程、統整課程和進階課程。各類課程的目標與對象如下：

一、標準課程：

名稱	目標	建議對象
數學甲 I	提供將來要進入理、工、醫、農領域學生所需的數學基礎	自然組學生
數學甲 II		自然組學生
數學乙 I	提供將來要進入工商管理領域學生所需的數學基礎	社會組學生
數學乙 II		社會組學生

二、基礎課程

名稱	目標	建議對象
基礎數學 I	補救數學基礎不足的部份	數學基礎不足者
基礎數學 II		數學基礎不足者

三、統整課程

名稱	目標	建議對象
統整數學	進行不同章節的連結以深化學習	一般學生
數學演習	加強練習，從實作中掌握學習目標	一般學生

四、進階課程

名稱	目標	建議對象
微積分 I	定位為大一微積分，這是順應世界潮流，提供學生提前修習大學課程的管道	學習超前學生
微積分 II		學習超前學生
選修代數	加深加廣代數學的學習	有興趣的學生
選修幾何	加深加廣幾何學的學習	有興趣的學生
數學軟體	學習以數學軟體解決問題	有興趣的學生
數學建模	學習建立數學模型解決問題	有興趣的學生

註 1：微積分 I 涵蓋數學甲 II 的內容，可取代數學甲 II 的選修。

註 2：微積分 I、II 可到大學選修。

貳、時間分配

一、標準課程

名稱	學分數	建議年級
數學甲 I	4	三上
數學甲 II	4	三下
數學乙 I	3	三上
數學乙 II	3	三下

註：對學習超前的學生可提前修習數學甲 I，以接續選修微積分 I、II。

二、基礎課程

名稱	建議學分數	建議年級
基礎數學 I	1	一上
基礎數學 II	1	一下

三、統整課程

名稱	建議學分數	建議年級
統整數學	2~3	三年級任一學期
數學演習	1	各學期

四、進階課程

名稱	建議學分數	建議年級
微積分 I	3~4	三上
微積分 II	3~4	三下
選修代數	2	一、二年級任一學期
選修幾何	2	二、三年級任一學期
數學軟體	2	二、三年級任一學期
數學建模	2	二、三年級任一學期

參、教材綱要

本課綱僅規範標準課程的綱要。基礎課程、統整課程及進階課程的內容由各校自訂。但進階課程中的微積分 I、II 應等同於大學的微積分標準。

數學甲 I、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、 機率統計 II	1. 隨機的意義	1.1 隨機的意義 1.2 期望值、變異數、標準差	3.1 不含系統抽樣、部落抽樣
	2. 二項分布	2.1 獨立事件、重複試驗、二項分布、二項分布的性質	
	3. 抽樣與統計推論	3.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣 3.2 亂數表 3.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀	
二、 三角函數	1. 一般三角函數的性質與圖形	1.1 弧度、弧長及扇形面積公式 1.2 倒數關係、商數關係、平方關係 1.3 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形	2.1 不含不同週期的三角函數疊合
	2. 三角函數的應用	2.1 波動：正餘弦函數的疊合 2.2 圓、橢圓的參數式	
	3. 複數的幾何意涵	3.1 複數平面、絕對值、複數的極式、複數乘法的幾何意義 3.2 棣美弗定理，複數的 n 次方根	

數學甲 II、4 學分

主題	子題	內容	備註
一、 極限與函數	1.數列及其極限	1.1 兩數列的比較 1.2 數列的極限及極限的性質 1.3 無窮等比級數、循環小數 1.4 夾擠定理	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀 1.4 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理
	2.函數的概念	2.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數	
	3.函數的極限	3.1 函數的極限 3.2 連續函數、介值定理	
二、 多項式函數的微積分	1.微分	1.1 導數與切線 1.2 微分的加、減、乘運算	3.3 不涉及分部積分與變數變換法
	2.函數性質的判定	2.1 遞增、遞減、凹凸性、函數極值的一階與二階檢定法 2.2 三次多項式的繪圖	
	3.積分的意義	3.1 定積分的意義 3.2 微積分基本定理 3.3 多項式函數的定積分與不定積分的計算	
	4.積分的應用	4.1 以求圓面積、球體體積、角錐體體積、解自由落體運動方程式為主	
附錄	牛頓求根法		

數學乙 I、3 學分

主題	子題	內容	備註
一、 機率統計 II	1.隨機的意義	1.1 隨機的意義	
	2.期望值、變異數、標準差	2.1 期望值、變異數、標準差	
	3.獨立事件	3.1 獨立事件	
	4.二項分布	4.1 重複試驗、二項分布、二項分布的性質	

主題	子題	內容	備註
	5.抽樣與統計推論	5.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣 5.2 亂數表 5.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀	5.1 不含系統抽樣、部落抽樣
二、三角函數	1.弧度、弧長 2.一般三角函數的性質與圖形	1.1 弧度、弧長及扇形面積公式 2.1 倒數關係、商數關係、平方關係 2.2 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形	

數學乙 II、3 學分

主題	子題	內容	備註
一、極限與函數	1.數列及其極限 2.無窮等比級數 3.函數的概念 4.函數的極限	1.1 兩數列的比較 1.2 數列的極限及極限的性質 2.1 無窮等比級數 2.2 循環小數 2.3 夾擠定理 3.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數 4.1 函數的極限 4.2 連續函數、介值定理	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀 2.3 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理

肆、實施要點

一、教材編寫

- (一) 應力求掌握本課綱設計的精神編寫教材，儘量配合課綱子題設計的先後來訂定章節，但在內容上則不必拘泥綱要內容編排的順序。為達成教材流暢性與完整性所新增的內容，可置於附錄。
- (二) 在編寫要領上，應注意下列事項：
 1. 編寫教材時，應注意與國民中小學九年一貫課程的銜接。教材應具時代性、前瞻性及國際性。
 2. 教材應以精緻與完備的出版品呈現。
 3. 教材應注意到銜接、統整和連結。
 4. 教材的呈現應循序漸進，適當鋪陳，引發學習動機，注意學生學習心理，在直觀與嚴謹之間取得平衡，並兼顧從特例到一般推理的必要。
 5. 教材應有足夠多的範例與習題。範例應具有意義並反映數學思考，在範例之後應有隨堂練習，在課文之後應有啟發深思的習題。習題要扣緊主題，在深

度上由淺入深，不宜與教材內容有太大落差。範例與習題的妥適性可由下列的指標來判斷：

- (1) 是否為無意義的人工化難題？
 - (2) 所謂生活化的問題是否符合常理？
 - (3) 是否屬於大學程度的題材，雖可用高中所學的方法解決，但仍屬困難？
6. 範例與習題應注意與生活、其他學科及下列九大議題的連結：「生命教育、性別平等、法治教育、人權教育、環保教育、永續發展、多元文化、消費者保護教育、海洋教育」。
 7. 教師手冊要提供教師對教材進一步的認識，對課程深入的瞭解和最有效率的教法。教師手冊亦應提供相關的進階資訊，供教師參考。
 8. 專有名詞應採用教育部最新編訂公布的數學名詞。各專有名詞及外國人名應於索引中附原文。
- (三) 審查注意事項：教科書的審查應掌握課程綱要的內容、備註及其說明所呈現的精神，並依據上述教材編寫注意事項進行。審查時，應遵照國立編譯館所頒布的審訂規範，並尊重出版自由的精神。

二、教學進度

各校可配合學生學習情況，彈性調整教學進度。針對放棄學習的學生，應予適當的輔導。針對學習較慢的學生，應有以下補救措施：可依學習不足狀況開設基礎數學選修課程；可彈性調整學習進度，只要在學測前學完數學必修課即可；學習方式可採螺旋式，不一定要按課綱的章節順序學習；可依實際狀況彈性調整評量方式。針對學習較快的學生，則可提供進階選修課程，以激發其學習熱忱。

三、教學設備與資訊

為建構抽象思維的實體圖像，數學學科中心應研發電腦輔助教學範例（例如：以電腦協助講授函數圖形、立體幾何、解方程式和統計課程），並建立教學資訊平台，充分提供各項網路教學資訊予各校。

四、計算工具的使用

- (一) 在學生已熟練計算原理的情況下，為避免太多繁複計算降低學習效率，應允許學生於學習及評量中適當地使用計算器。例如統計數據的計算可使用普通計算器，指數、對數函數及三角函數的求值則可使用科學計算器。
- (二) 在學生熟練描點繪圖的情況下，可輔以電腦繪圖，加強其建立函數圖形的直觀。

五、教學評量

- (一) 平時測驗的方式宜有彈性，要針對學生學習狀況設計適合其程度的評量方式。在評量時要給予充分的時間思考，並要求學生將過程寫下，以瞭解學生思考的步驟。測驗的題目應區分為基礎和進階兩類，依學生程度做適當的評量。
- (二) 為導正學習文化，在實施全國性測驗評量時，應提供學生充分的思考時間，以避免學生為求快速解答而忽略數學思考的學習。同時題數不宜太少，以免為求鑑別度而將題目導引到難題化。程度上應從基礎題到進階題均勻分布。

相關評量單位應研究優良題型的評鑑指標，協助教學現場創造出優質的學習環境。

伍、附錄

數學甲 I、II 及數學乙 I、II 的說明與範例。

數學甲 I（選修）

數學甲 I 包括機率統計 II 以及三角函數，這些課題是銜接大學的微積分與機率統計的題材。在學習新的題材時，同時可統整複習數學 II 的機率統計以及數學 III 的三角學，以強化學生的基礎。

一、機率統計 II

生活中所接觸的變量（variables）常常具有隨機現象，比如甲乙兩人猜拳 n 次，甲贏乙的次數；投擲銅板 n 次，出現正面的次數；由電話簿隨機抽 n 個樣本，調查支持某一候選人的人數；股票的市場價值；台北市的房價；學測的成績；班上同學的身高體重；麥當勞一個月所賣出的漢堡個數等等。這些具有隨機性（不確定性）的變量就稱作隨機變量（也叫隨機變數）。它可能是離散型的（取值為離散的），也可能是連續型的。老師可在教學活動中請同學舉出隨機變數的例子，但隨機變數不需用機率空間上的函數來嚴格定義。隨機現象對自然組與社會組的學生同等重要。

對於機率與統計而言，重點在讓學生了解隨機的本質，並能學到估計的概念，而不只是學到數學的計算。各種概念產生的背後原因，如機率的性質，期望值、變異數及信賴區間等，更應闡釋清楚。

首先需對隨機變數進行數據資料的整理，也就是製作次數圖（ X 軸為隨機變量的值， Y 軸為次數）。將次數除以總次數，所得的函數就稱為機率質量函數（離散型），或機率密度函數（連續型）。高中課程只處理離散型的隨機變數。

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數是用來度量隨機變數的隨機性，變異數愈小，愈多隨機變數的值會落在期望值附近。當變異數為 0 時，所有隨機變數的值都是確定的值（也就是期望值）。反之，變異數愈大，反應了隨機變數的隨機性（不確定性）愈大。某項測驗的成績的變異數大，表示該測驗比較能夠區隔學生能力的差異。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

1. 隨機的意義

1.1 隨機的意義

以生活上的實例說明，如：

- 班上同學的學測級分相對次數圖（ X 軸為學測級分， Y 軸為該成績的相對次數）。
- 投銅板三次，正面出現的機率質量函數圖（ X 軸為正面出現的次數（ $X=0,1,2,3$ ）， Y 軸為該次數出現的機率）。

1.2 期望值、變異數、標準差

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所

有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

2. 二項分布

2.1 獨立事件、重複試驗、二項分布、二項分布的性質

說明此分布的由來，並且強調處處可見。給出其機率質量函數，並以二項式定理驗證確為機率質量函數。

- 擲銅板出現正面、反面的機率各為 $1/2$ ，投 n 次出現 k 次正面的機率為 $C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。
- 繪出二項分布的圖形，求期望值 np 、變異數 $np(1-p)$ 及標準差。

3. 抽樣與統計推論

3.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣

說明經常需要收集資料，以便對隨機現象做推論或預測。說明何時要普查，何時要抽樣調查，並介紹隨機抽樣法。

3.2 亂數表

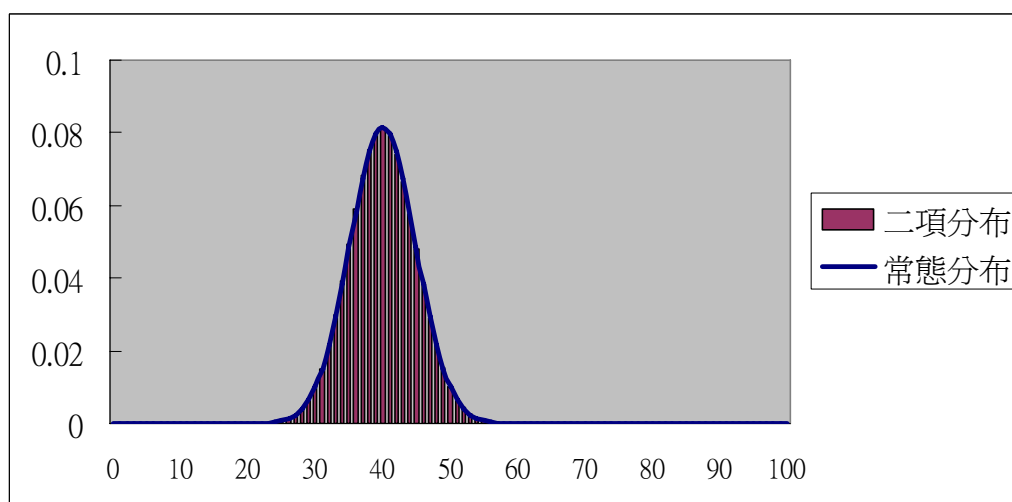
介紹亂數表的使用，並說明何時可使用。

3.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀

高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需要引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。

對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現機率為 p 的銅板 n 次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數的學生所得的信賴區間都會涵蓋 p ？

- 二項分布 $C_k^n (p)^k (1-p)^{n-k}$, $p = 0.4, n = 100$ 。
- 常態分布 $\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}, e = 2.718\dots$ ，常態分布可介紹它的表示法。



二、三角函數

在三角函數裡首先介紹弧度的觀念，並以圓心在原點的圓介紹廣義角的三角函數及其週期性質。討論它們的倒數關係、商數關係和平方關係，但三角恆等式不宜過度操作。

複數的幾何意涵是以三角函數呈現，內容包括複數的極式與棣美弗定理。爲了處理 1 的 n 次方根問題，要複習正、餘弦函數的和角公式。

三角函數的應用包括波動現象的刻劃，如：正、餘弦函數的疊合，以及圓、橢圓及其應用。

1. 一般三角函數的性質與圖形

1.1 弧度、弧長及扇形面積公式

複習弧度、弧長及扇形面積公式。

1.2 倒數關係、商數關係、平方關係

1.3 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形

包括六種三角函數。

由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，以及倒數關係及商數關係推導出 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 。

2. 三角函數及其應用

這裡主要談的是三角函數的應用及相關的三角方程式與恆等式。

2.1 波動

- 認識 $A \sin(\omega \cdot t + \theta_0)$ ， A 爲振幅、 $\omega \cdot t + \theta_0$ 爲相角的物理意涵。
- 正、餘弦函數的疊合：透過和角公式，同週期正、餘弦函數的和，如：
 $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ 。
- 不談不同週期的正、餘弦函數的疊合。因此也不談和差化積與積化和差的公式。

2.2 圓、橢圓的參數式

3. 複數的幾何意涵

3.1 複數平面、絕對值、複數的極式、複數乘法的幾何意義

3.2 棣美弗定理，複數的 n 次方根

- $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ 。
- 複數的 n 次方根僅談根的求法，以及複數的等比級數，如：

$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$ ，不宜做牽涉到根的變形的級數問題，如：

$$\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2} + \cdots + \frac{1}{1-\omega^n}。$$

數學甲 II (選修)

數學甲 II 的目標是對函數、多項式函數及定量幾何作一統整學習，並爲未來微積分的學習做準備。

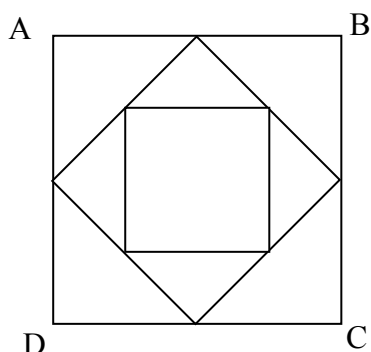
一、極限與函數

本章的用意是要對函數作一統整的學習並延伸到函數的操作，特別是合成函數的操作，合成函數應與平移與伸縮作連結。夾擠定理應透過幾何圖形建立直觀，並利用不等式做上下界的估計，不等式型式的數學歸納法亦在此學習。

1. 數列及其極限

1.1 兩數列的比較

- 不等式型式的數學歸納法。
- 1.2 數列的極限及極限的性質
以圖形、電腦展示的範例讓學生認識極限的概念。
- 1.3 無窮等比級數、循環小數
- 證明循環小數是有理數。
 - 無窮等比級數的應用範例：如下圖，ABCD 為邊長等於 1 的正方形，連接 ABCD 各邊中點可得一個內接正方形，如此繼續作下去，會得到無限多個正方形，求這些正方形的面積總和。



1.4 夾擠定理

可用圖形或面積來建立夾擠定理的直觀，例如：

- 圓面積可用內接與外切正 n 邊形的面積夾擠而得。

2. 函數的概念

2.1 函數的定義、四則運算、合成函數

- 合成函數學習的重點在將重要函數寫成簡單函數的合成，或是將函數標準化。例如利用平移將 $y = (x - h)^3$ 化成標準式 $y = x^3$ ，透過學習 $y = x^3$ 的函數性質，了解 $y = (x - h)^3$ 的函數性質。

函數的例子及繪圖：這裡的繪圖是指圖形的描點，是要建立學生對於圖形的直觀。

- 絕對值函數 $y = |x|$ 、簡單有理函數 $y = \frac{c}{x^n}$ ， $n=1,2$ ，以及這些函數的平移。
- 根式函數與隱函數，如： $y = \sqrt{x}$ 、 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 、 $x^2 + y^2 = 1$ 。

3. 函數的極限

3.1 函數的極限

3.2 連續函數、介值定理

二、多項式函數的微積分

透過介紹微積分的基本概念，對多項式函數的性質作統整學習。包括三次多項式函數的繪圖，以及推導一些幾何形體的面積、體積的公式。至於牛頓求根法則置於附錄。

1. 微分

1.1 導數與切線

1.2 微分的加減運算

2. 函數性質的判定

2.1 上升、下降、凹凸性、函數極值的一階、二階檢定法

相關評量單位應研究優良題型的評鑑指標，協助教學現場創造出優質的學習環境。

伍、附錄

數學甲 I、II 及數學乙 I、II 的說明與範例。

數學甲 I（選修）

數學甲 I 包括機率統計 II 以及三角函數，這些課題是銜接大學的微積分與機率統計的題材。在學習新的題材時，同時可統整複習數學 II 的機率統計以及數學 III 的三角學，以強化學生的基礎。

一、機率統計 II

生活中所接觸的變量（variables）常常具有隨機現象，比如甲乙兩人猜拳 n 次，甲贏乙的次數；投擲銅板 n 次，出現正面的次數；由電話簿隨機抽 n 個樣本，調查支持某一候選人的人數；股票的市場價值；台北市的房價；學測的成績；班上同學的身高體重；麥當勞一個月所賣出的漢堡個數等等。這些具有隨機性（不確定性）的變量就稱作隨機變量（也叫隨機變數）。它可能是離散型的（取值為離散的），也可能是連續型的。老師可在教學活動中請同學舉出隨機變數的例子，但隨機變數不需用機率空間上的函數來嚴格定義。隨機現象對自然組與社會組的學生同等重要。

對於機率與統計而言，重點在讓學生了解隨機的本質，並能學到估計的概念，而不只是學到數學的計算。各種概念產生的背後原因，如機率的性質，期望值、變異數及信賴區間等，更應闡釋清楚。

首先需對隨機變數進行數據資料的整理，也就是製作次數圖（ X 軸為隨機變量的值， Y 軸為次數）。將次數除以總次數，所得的函數就稱為機率質量函數（離散型），或機率密度函數（連續型）。高中課程只處理離散型的隨機變數。

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數是用來度量隨機變數的隨機性，變異數愈小，愈多隨機變數的值會落在期望值附近。當變異數為 0 時，所有隨機變數的值都是確定的值（也就是期望值）。反之，變異數愈大，反應了隨機變數的隨機性（不確定性）愈大。某項測驗的成績的變異數大，表示該測驗比較能夠區隔學生能力的差異。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

1. 隨機的意義

1.1 隨機的意義

以生活上的實例說明，如：

- 班上同學的學測級分相對次數圖（ X 軸為學測級分， Y 軸為該成績的相對次數）。
- 投銅板三次，正面出現的機率質量函數圖（ X 軸為正面出現的次數（ $X=0,1,2,3$ ）， Y 軸為該次數出現的機率）。

1.2 期望值、變異數、標準差

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所

有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

2. 二項分布

2.1 獨立事件、重複試驗、二項分布、二項分布的性質

說明此分布的由來，並且強調處處可見。給出其機率質量函數，並以二項式定理驗證確為機率質量函數。

- 擲銅板出現正面、反面的機率各為 $1/2$ ，投 n 次出現 k 次正面的機率為 $C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。
- 繪出二項分布的圖形，求期望值 np 、變異數 $np(1-p)$ 及標準差。

3. 抽樣與統計推論

3.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣

說明經常需要收集資料，以便對隨機現象做推論或預測。說明何時要普查，何時要抽樣調查，並介紹隨機抽樣法。

3.2 亂數表

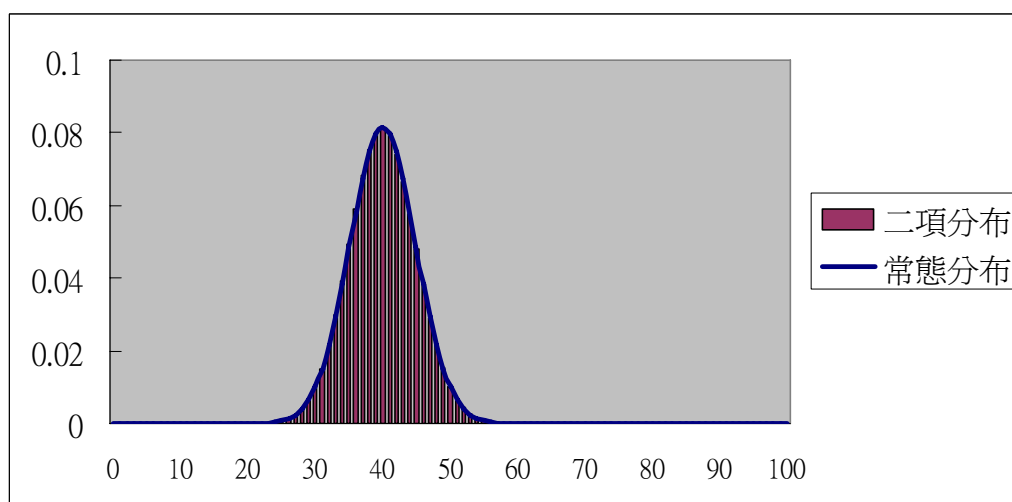
介紹亂數表的使用，並說明何時可使用。

3.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀

高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需要引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。

對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現機率為 p 的銅板 n 次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數的學生所得的信賴區間都會涵蓋 p ？

- 二項分布 $C_k^n (p)^k (1-p)^{n-k}$, $p = 0.4, n = 100$ 。
- 常態分布 $\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}, e = 2.718\dots$ ，常態分布可介紹它的表示法。



二、三角函數

在三角函數裡首先介紹弧度的觀念，並以圓心在原點的圓介紹廣義角的三角函數及其週期性質。討論它們的倒數關係、商數關係和平方關係，但三角恆等式不宜過度操作。

複數的幾何意涵是以三角函數呈現，內容包括複數的極式與棣美弗定理。爲了處理 1 的 n 次方根問題，要複習正、餘弦函數的和角公式。

三角函數的應用包括波動現象的刻劃，如：正、餘弦函數的疊合，以及圓、橢圓及其應用。

1. 一般三角函數的性質與圖形

1.1 弧度、弧長及扇形面積公式

複習弧度、弧長及扇形面積公式。

1.2 倒數關係、商數關係、平方關係

1.3 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形

包括六種三角函數。

由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，以及倒數關係及商數關係推導出 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 。

2. 三角函數及其應用

這裡主要談的是三角函數的應用及相關的三角方程式與恆等式。

2.1 波動

- 認識 $A \sin(\omega \cdot t + \theta_0)$ ， A 爲振幅、 $\omega \cdot t + \theta_0$ 爲相角的物理意涵。
- 正、餘弦函數的疊合：透過和角公式，同週期正、餘弦函數的和，如：
 $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ 。
- 不談不同週期的正、餘弦函數的疊合。因此也不談和差化積與積化和差的公式。

2.2 圓、橢圓的參數式

3. 複數的幾何意涵

3.1 複數平面、絕對值、複數的極式、複數乘法的幾何意義

3.2 棣美弗定理，複數的 n 次方根

- $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ 。
- 複數的 n 次方根僅談根的求法，以及複數的等比級數，如：

$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$ ，不宜做牽涉到根的變形的級數問題，如：

$$\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2} + \cdots + \frac{1}{1-\omega^n}。$$

數學甲 II (選修)

數學甲 II 的目標是對函數、多項式函數及定量幾何作一統整學習，並爲未來微積分的學習做準備。

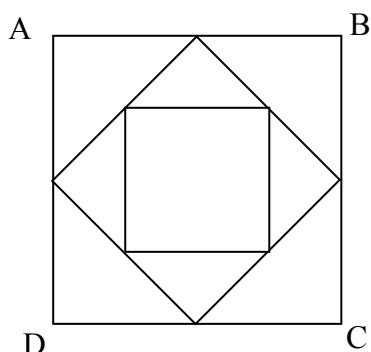
一、極限與函數

本章的用意是要對函數作一統整的學習並延伸到函數的操作，特別是合成函數的操作，合成函數應與平移與伸縮作連結。夾擠定理應透過幾何圖形建立直觀，並利用不等式做上下界的估計，不等式型式的數學歸納法亦在此學習。

1. 數列及其極限

1.1 兩數列的比較

- 不等式型式的數學歸納法。
- 1.2 數列的極限及極限的性質
以圖形、電腦展示的範例讓學生認識極限的概念。
- 1.3 無窮等比級數、循環小數
- 證明循環小數是有理數。
 - 無窮等比級數的應用範例：如下圖，ABCD 為邊長等於 1 的正方形，連接 ABCD 各邊中點可得一個內接正方形，如此繼續作下去，會得到無限多個正方形，求這些正方形的面積總和。



1.4 夾擠定理

可用圖形或面積來建立夾擠定理的直觀，例如：

- 圓面積可用內接與外切正 n 邊形的面積夾擠而得。

2. 函數的概念

2.1 函數的定義、四則運算、合成函數

- 合成函數學習的重點在將重要函數寫成簡單函數的合成，或是將函數標準化。例如利用平移將 $y = (x - h)^3$ 化成標準式 $y = x^3$ ，透過學習 $y = x^3$ 的函數性質，了解 $y = (x - h)^3$ 的函數性質。

函數的例子及繪圖：這裡的繪圖是指圖形的描點，是要建立學生對於圖形的直觀。

- 絕對值函數 $y = |x|$ 、簡單有理函數 $y = \frac{c}{x^n}$ ， $n=1,2$ ，以及這些函數的平移。
- 根式函數與隱函數，如： $y = \sqrt{x}$ 、 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 、 $x^2 + y^2 = 1$ 。

3. 函數的極限

3.1 函數的極限

3.2 連續函數、介值定理

二、多項式函數的微積分

透過介紹微積分的基本概念，對多項式函數的性質作統整學習。包括三次多項式函數的繪圖，以及推導一些幾何形體的面積、體積的公式。至於牛頓求根法則置於附錄。

1. 微分

1.1 導數與切線

1.2 微分的加減運算

2. 函數性質的判定

2.1 上升、下降、凹凸性、函數極值的一階、二階檢定法

2.2 三次多項式的繪圖

- 透過函數的特徵（極值點、反曲點、上升、下降、凹凸性）來繪圖。

3. 積分的意義

3.1 定積分的意義

- 介紹上、下和及其極限。用 $\sum_{k=1}^n k$ ， $\sum_{k=1}^n k^2$ 的求和公式計算 $\int_0^a x dx$, $\int_0^a x^2 dx$ 。

3.2 微積分基本定理

- 由高度函數對底的積分來定義面積函數，並說明面積函數對底的微分為高度。
- 由速度函數對時間的積分來定義距離函數，並說明距離函數對時間的微分為速度。

3.3 多項式函數的定積分與不定積分的計算：不涉及分部積分與變數變換法

4. 積分的應用

4.1 以求圓面積、球體體積、角錐體體積和解自由落體運動方程式為主

- 圓面積：假設已知圓周長公式，以積分方法求圓面積： $\int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2$ 。
- 球體體積：假設已知圓面積公式，以切割 X 軸方式的積分方法求球體體積： $\int_{-R}^R \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3} \pi R^3$ 。
- 角錐體體積：假設已知底面積 A，以切割 Z 軸方式的積分方法求角錐體體積：在每一個截面的面積 $H^2 : z^2 = A : A(z)$ ， $\int_0^H \frac{Az^2}{H^2} dz = \frac{1}{3} AH$ 。
- 自由落體運動方程式：已知初始位置 z_0 與初始速度 v_0 ，求時間 t 時的速度： $v(t) = v_0 - gt$ ；時間 t 時的位置： $z_0 + \int_0^t v(t) dt = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ 。

數學甲 II 附錄：牛頓求根法

- \sqrt{a} ， $a^{\frac{1}{n}}$ 的牛頓求根法。

數學乙 I（選修）

數學乙 I 包括機率統計 II 以及三角函數，這些課題是銜接大學的微積分與機率統計的題材。在學習新的題材時，同時可統整複習數學 II 的機率統計以及數學 III 的三角學，以強化學生的基礎。

一、機率統計 II

生活中所接觸的變量（variables）常常具有隨機現象，比如甲乙兩人猜拳 n 次，甲贏乙的次數；投擲銅板 n 次，出現正面的次數；由電話簿隨機抽 n 個樣本，調查支持某一候選人的人數；股票的市場價值；台北市的房價；學測的成績；班上同學的身高體重；麥當勞一個月所賣出的漢堡個數等等。這些具有隨機性（不確定性）的變量就稱作隨機變量（也叫隨機變數）。它可能是離散型的（取值為離散的），也可能是連續型的。老師可在教學活動中請同學舉出隨機變數的例子，但隨機變數不需用機率空間上的函數來嚴格定義。隨機現象對自然組與社會組的學生同等重要。

對於機率與統計而言，重點在讓學生了解隨機的本質，並能學到估計的概念，而不只是學到數學的計算。各種概念產生的背後原因，如：機率的性質，期望值、變異數及信賴區間等，更應闡釋清楚。

首先需對隨機變數進行數據資料的整理，也就是製作次數圖（X 軸為隨機變量的值，Y 軸為次數）。將次數除以總次數，所得的函數就稱為機率質量函數（離散型），或機率密度函數（連續型）。高中課程只處理離散型的隨機變數。

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數是用來度量隨機變數的隨機性，變異數愈小，愈多隨機變數的值會落在期望值附近。當變異數為 0 時，所有隨機變數的值都是確定的值（也就是期望值）。反之，變異數愈大，反應了隨機變數的隨機性（不確定性）愈大。某項測驗的成績的變異數大，表示該測驗比較能夠區隔學生能力的差異。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

1. 隨機的意義

1.1 隨機的意義

以生活上的實例說明，如：

- 班上同學的學測級分相對次數圖（X 軸為學測級分，Y 軸為該成績的相對次數）。
- 投銅板三次，正面出現的機率質量函數圖（X 軸為正面出現的次數（ $X=0,1,2,3$ ），Y 軸為該次數出現的機率）。

2. 期望值、變異數、標準差

人們常想粗略知道某一隨機變數的值有多大，而期望值的角色，就是用單一數值來代表隨機現象中變量的大小。期望值就像是隨機變數的核心，隨機變數所有可能的值，都散佈在期望值的左右。變異數的正平方根稱為標準差，用來表示隨機變數的可能值偏離期望值的大小。

3. 獨立事件

4. 二項分布

4.1 重複試驗、二項分布、二項分布的性質

說明此分布的由來，並且強調處處可見。給出其機率質量函數，並以二項式定理驗證確為機率質量函數。

- 擲銅板出現正面、反面的機率各為 $1/2$ ，投 n 次出現 k 次正面的機率為

$$C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n。$$

- 繪出二項分布的圖形，求期望值 np ；變異數 $np(1-p)$ 及標準差的計算可置於教科書的附錄。

5. 抽樣與統計推論

5.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣

說明經常需要收集資料，以便對隨機現象做推論或預測。說明何時要普查，何時要抽樣調查，並介紹隨機抽樣法。

5.2 亂數表

介紹亂數表的使用，並說明何時可使用。

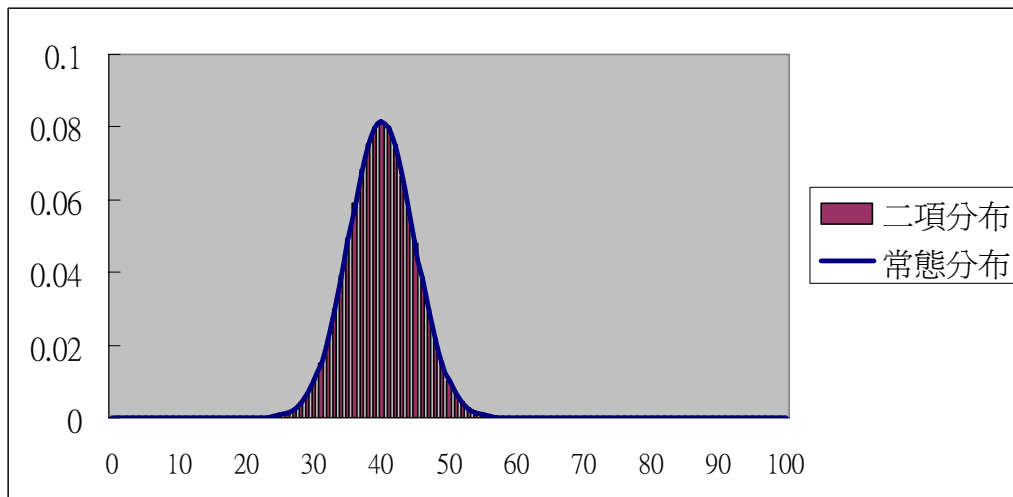
5.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀

高中程度的統計推論只做隨機變數期望值的估計，它的背後理論是中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需要引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，以活動方式建立學生對於中央極限定理的直觀。

對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投

擲正面出現機率為 p 的銅板 n 次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數的學生所得的信賴區間都會涵蓋 p ？

- 二項分布 $C_k^n (p)^k (1-p)^{n-k}$, $p = 0.4, n = 100$ 。
- 常態分布 $\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$, $e = 2.718\dots$ ，常態分布可介紹它的表示法。



二、三角函數

在三角函數裡首先介紹弧度的觀念，並以圓心在原點的圓介紹廣義角的三角函數及其週期性質。討論它們的倒數關係、商數關係、平方關係，但三角恆等式不宜過度操作。

1. 弧度、弧長

1.1 弧度、弧長及扇形面積公式

複習弧度、弧長及扇形面積公式。

2. 一般三角函數的性質與圖形

2.1 倒數關係、商數關係、平方關係

2.2 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形

包括六種三角函數。

- 由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，以及倒數關係及商數關係推導出 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 。

數學乙 II (選修)

數學乙 II 的目標是對函數作一統整學習。

一、極限與函數

本章的用意是要對函數作一統整的學習並延伸到函數的操作，特別是合成函數的操作，合成函數應與平移與伸縮作連結。夾擠定理應透過幾何圖形建立直觀，並利用不等式做上下界的估計，不等式型式的數學歸納法亦在此學習。

1. 數列及其極限

1.1 兩數列的比較

- 不等式型式的數學歸納法

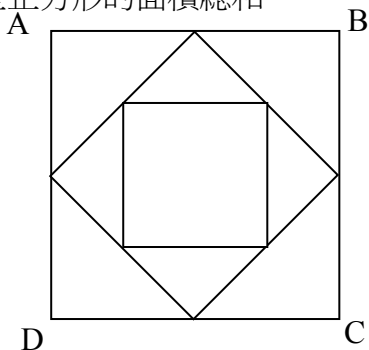
1.2 數列的極限及極限的性質

以圖形、電腦展示的範例讓學生認識極限的概念。

2. 無窮等比級數

2.1 無窮等比級數

- 無窮等比級數的應用範例：如下圖， $ABCD$ 為邊長等於 1 的正方形，連接 $ABCD$ 各邊中點可得一個內接正方形，如此繼續作下去，會得到無限多個正方形，求這些正方形的面積總和。



2.2 循環小數

- 證明循環小數是有理數。

2.3 夾擠定理

可用圖形或面積來建立夾擠定理的直觀，例如：

- 圓面積可用內接與外切正 n 邊形的面積夾擠而得。

3. 函數的概念

3.1 函數的定義、四則運算、合成函數

- 合成函數學習的重點在將重要函數寫成簡單函數的合成，或是將函數標準化。例如：利用平移將 $y = (x - h)^3$ 化成 $y = x^3$ 的標準式，透過學習 $y = x^3$ 的函數性質，了解 $y = (x - h)^3$ 的函數性質。

函數的例子及繪圖：這裡的繪圖是指圖形的描點，是要建立學生對於圖形的直觀。

- 絕對值函數 $y = |x|$ 、簡單有理函數 $y = \frac{c}{x^n}$, $n=1,2$ ，以及這些函數的平移。
- 根式函數與隱函數，如： $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 、 $x^2 + y^2 = 1$ 。

4. 函數的極限

4.1 函數的極限

4.2 連續函數、介值定理

