從一個空間測量問題談起

歐志昌、施羿如、柳賢*

國立高師大附中數學教師

*國立高雄師範大學數學系榮譽教授

緣起

筆者在 2017 年數學活化教學研討會的教學演示中，以下面這個題目作為開場：

> 設地面上三點 A, B, C 分別測得一座山的仰角為$30°, 45°, 60°$。已知 A, B, C 三點共線，(但與山腳不共線)，$\overline{AB}=1200$ 公尺，$\overline{BC}=600$ 公尺，則此山高為多少公尺？

這是一個大家在教完三角測量單元後，會讓學生練習的一個題目，甚至於是各版本教科書的教學範例。一般而言，在課本中會提供圖形(精美的彩色圖片)，如果是平時測驗或是月考，老師們則會刻意將圖形不呈現，希望學生能從題目的敘述中，將文字訊息轉換成能解決問題的圖形，因為數學老師們應該都了解，構圖是學生無法處理好空間三角測量問題的關鍵之一。在平常的任教過程中，有的學生會很仔細地詢問一些問題，例如：題目中又沒有說 A, B, C 三個點的相對位置，有依序嗎？或者說，當圖形給定時，我們是否曾懷疑這樣的條件與圖形是否真的存在？又換個角度思考，當我們在命題的時候，最常調整題目的方式就是改數據，是否會因為我們任意亂改數據，造成其實根本就不存在這樣的圖形！我們的學生是否具有這樣的能力或是素養能判斷解出來的答案是否合理？合理的判斷標準又是什麼呢？

因此，在這個佈題之下，我要求學生思考以下兩個問題：

1. 請學生作答並求出題目所要的答案。

2. 請學生評論此題的答案是否合理，並說明理由。

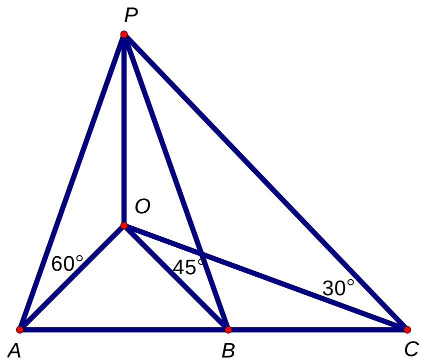
當天的場景與學生反應，其實讓參與課程的學生及與會的老師們有了一些震撼。學生非常習以為常的利用餘弦定理，搭配特殊角的邊長關係解出山的高度，但是觀察學生作答的內容可以發現，學生的構圖並不相同，也就是 A, B, C 三個點的相對位置有不同的排列順序，這時互相交流一下彼此的做法後，就有學生提出疑問：「有規定 A, B, C 三個點的順序嗎？還是都可以？可是答案會不一樣耶！」這時候就可以進入第 2 題的討論了。

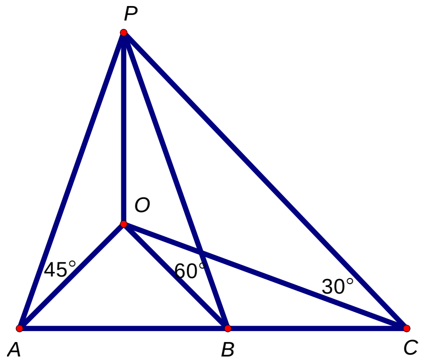
學生對於答案的合理性如何檢查，其實是陌生的！平常的數學課程中，學

生也常會遇到需要檢查所求得答案的正確性與否，但是比較是正負號的合理性或是已知條件的限制，對於幾何題的答案較少有答案檢驗的情況，所以僅有少數學生有意識到檢驗的方法。但是經過參與學生的分享，大部分同學都有一種恍然大悟的感覺，原來是要用三角形的「兩邊和大於第三邊」來做檢核。以下我就從這個題目出發，來探討山的高度與 $\overline{AB}$ 長、$\overline{BC}$ 長之間的關係。

【問題】設地面上三點 A,B,C 分別測得一座山的仰角為 $60°,45°,30°$ (次序可換)。已知 A,B,C 三點共線，但與山腳不共線，以下將探討山的高度與 $\overline{AB}$ 長、$\overline{BC}$ 長的關係。

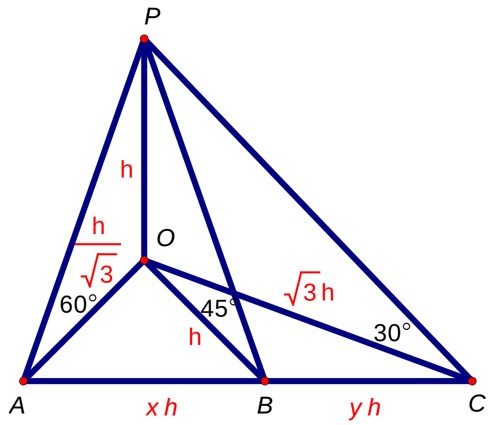
三點 A,B,C 依照**仰角次序**，可分為：$60°-45°-30°$，$45°-60°-30°$ 兩種類型來討論。





(一) $60°-45°-30°$ 類型

假設山高為 h，如圖，仰角依序為 $60°-45°-30°$



則 $\overline{OA}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OC}=\sqrt{3}h$

令 $\overline{AB}=xh$，$\overline{BC}=yh$

在 ΔOAC 中，令 $\angle OBA=\theta$，則 $\angle OBC=180°-\theta$

由 $\cos\theta=-\cos(180°-\theta)$

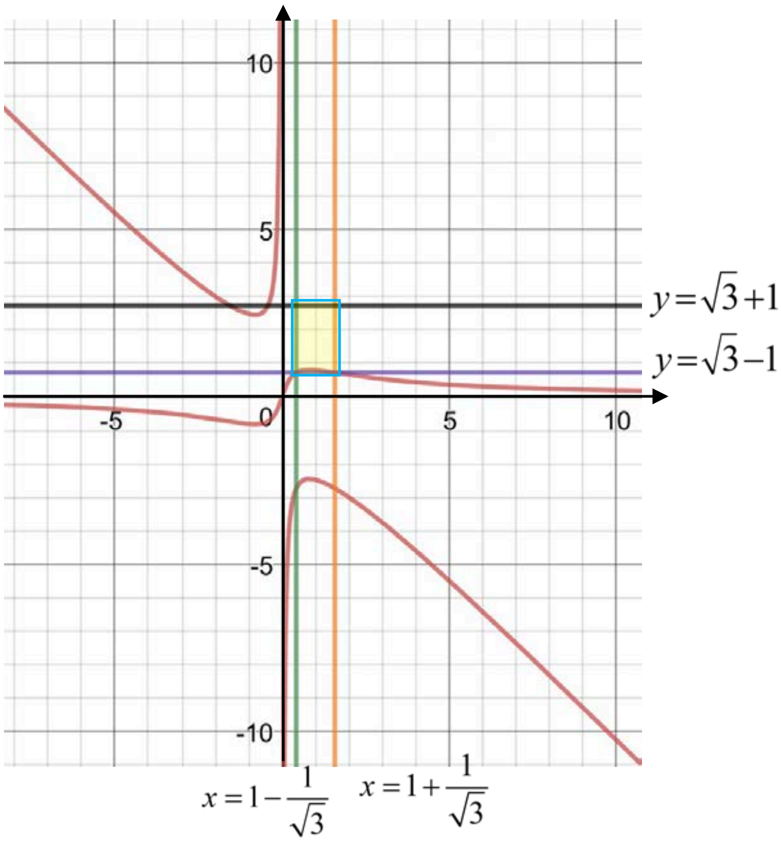
$$\frac{h^2+(xh)^2-(\frac{h}{\sqrt{3}})^2}{2h(xh)}=-\frac{h^2+(yh)^2-(\sqrt{3}h)^2}{2h(yh)} \Rightarrow \frac{x^2+\frac{2}{3}}{x}=-\frac{y^2-2}{y}$$

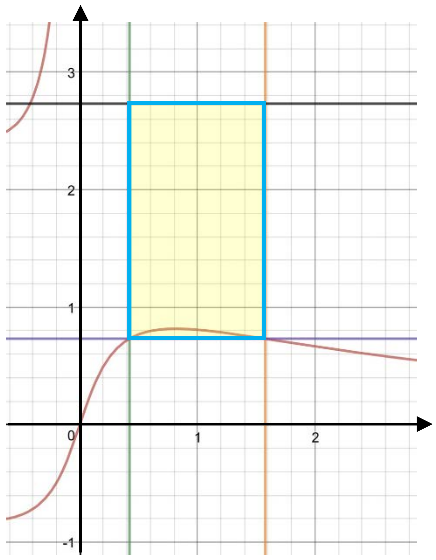
$$\therefore x+\frac{2}{3x}=-y+\frac{2}{y}$$

又三角形的三邊長有「兩邊和大於第三邊」的限制

$$\therefore 1-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 且 } \sqrt{3}-1<y<\sqrt{3}+1$$

作圖如下：





在上述的限制條件中討論 $\frac{x}{y}$ 的範圍：

(1) 左端點：當 $(x,y)=(1-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}-1)$ 時，$\frac{x}{y}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 右端點：當 $(x,y)=(1+\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}-1)$ 時，

$$\frac{x}{y}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$$

因此，$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{x}{y}<\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$。範圍大約為 $0.577\cdots<\frac{x}{y}<2.154\cdots$。

(二) $45^\circ-60^\circ-30^\circ$ 類型

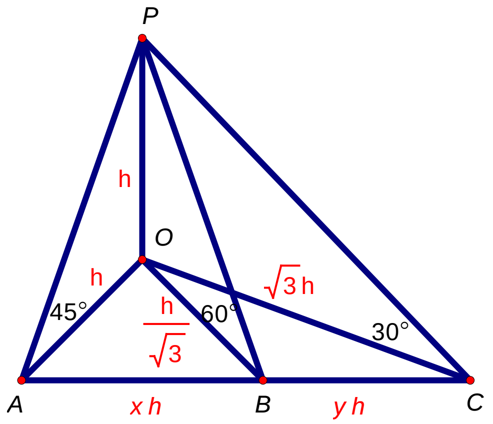
假設山高為 h，如圖，仰角依序為 $45^\circ-60^\circ-30^\circ$

則 $\overline{OA}=h$，$\overline{OB}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{OC}=\sqrt{3}h$

令 $\overline{AB}=xh$，$\overline{BC}=yh$

在 ΔOAC 中，令 $\angle OBA=\theta$，則 $\angle OBC=180^\circ-\theta$

由 $\cos\theta=-\cos(180^\circ-\theta)$



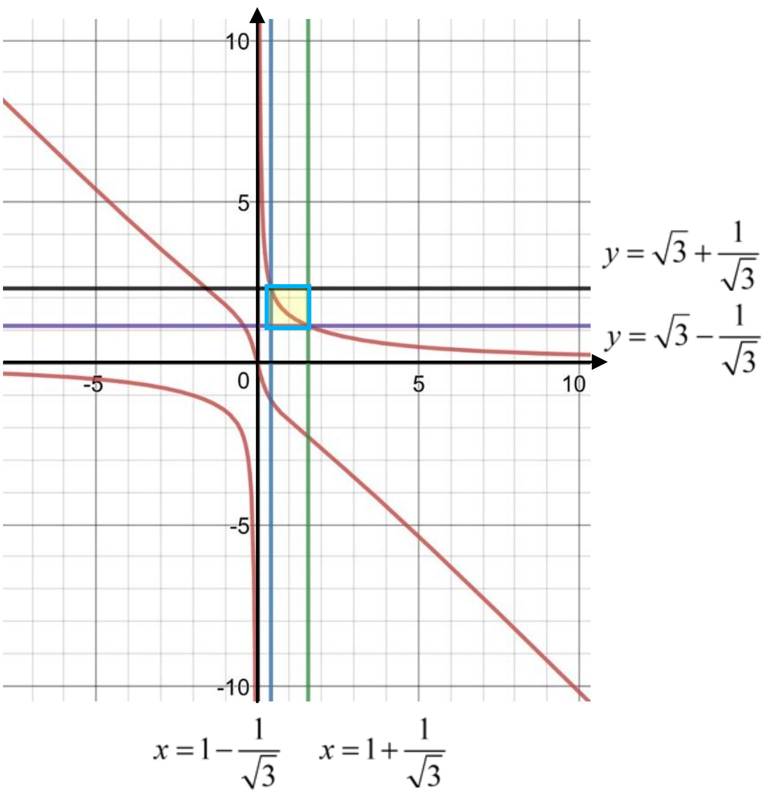
$$\frac{(\frac{h}{\sqrt{3}})^2+(xh)^2-h^2}{2(\frac{h}{\sqrt{3}})(xh)}=-\frac{(\frac{h}{\sqrt{3}})^2+(yh)^2-(\sqrt{3}h)^2}{2(\frac{h}{\sqrt{3}})(yh)}\Rightarrow\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x}=-\frac{y^2-\frac{8}{3}}{y}$$

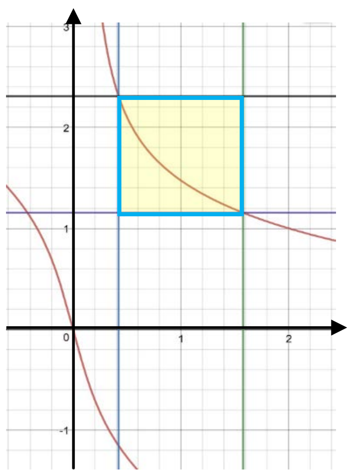
$$\therefore x-\frac{2}{3x}=-y+\frac{8}{3y}$$

又三角形的三邊長有「兩邊和大於第三邊」的限制

$$\therefore 1-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 且 } \sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}<y<\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

作圖如下：





在上述的限制條件中討論$\dfrac{x}{y}$的範圍：

(1)左端點：當$(x,y)=(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}})$時，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

(2)右端點：當$(x,y)=(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$時，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

因此，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$。範圍大約為$0.183\cdots<\dfrac{x}{y}<1.366\cdots$。

以原題的數據來看，$\overline{AB}=1200$，$\overline{BC}=600$，此時的$\dfrac{x}{y}=2$，

因此A,B,C三點的**仰角次序**，必為：$60°-45°-30°$，才不會出現數據有矛盾的現象。

綜合上述的兩種限制條件，由A,B,C三點(依序)的$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{x}{y}$條件來討論，可得下列結果：

(1)當$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$：$45°-60°-30°$類型。

(2)當$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$：則兩種情形都有可能發生。

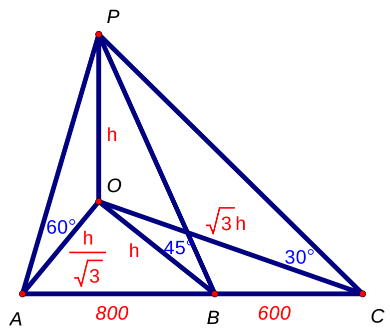
例如：$\overline{AB}=800$，$\overline{BC}=600$，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}=1.33\cdots$

① 當A,B,C三點的**仰角**依序為$60°-45°-30°$時，

假設山高為h，

則$\overline{OA}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OC}=\sqrt{3}h$

在ΔOAC中，令$\angle OBA=\theta$，則



$\angle OBC=180°-\theta$

由$\cos\theta=-\cos(180°-\theta)$

$$\frac{h^2+800^2-(\frac{h}{\sqrt{3}})^2}{2h(800)}=-\frac{h^2+600^2-(\sqrt{3}h)^2}{2h(600)}$$

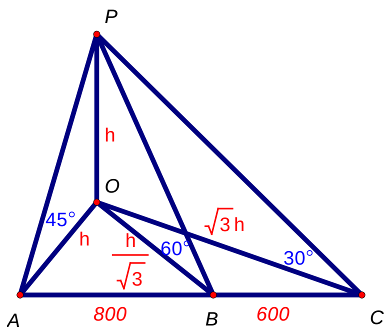
$\therefore h=200\sqrt{14}$

檢驗每個三角形的三邊長「兩邊和大於第三邊」的限制均成立。

② 當 A,B,C 三點的**仰角**依序為 $45^\circ-60^\circ-30^\circ$ 時，

假設山高為 h，

則 $\overline{OA}=h$，$\overline{OB}=\frac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{OC}=\sqrt{3}h$



在 ΔOAC 中，令 $\angle OBA=\theta$，則 $\angle OBC=180^\circ-\theta$

由 $\cos\theta=-\cos(180^\circ-\theta)$

$$\frac{(\frac{h}{\sqrt{3}})^2+800^2-h^2}{2(\frac{h}{\sqrt{3}})(800)}=-\frac{(\frac{h}{\sqrt{3}})^2+600^2-(\sqrt{3}h)^2}{2(\frac{h}{\sqrt{3}})(600)}$$

$\therefore h=600\sqrt{\frac{14}{19}}$

檢驗每個三角形的三邊長「兩邊和大於第三邊」的限制均成立。

(3)當 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{x}{y}<\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ ：$60^\circ-45^\circ-30^\circ$ 類型。

(4)當 $\frac{x}{y}<\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ 或 $\frac{x}{y}>\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ ：沒有符合條件的圖形。

結語

從一個在數學課程中平凡無奇的題目上，透過學生的疑惑，開啟了我們進一步去探討條件的限制性，並同時能引導學生重新審視解題之後答案的合理性。這可以讓學生更進一步對這個空間測量問題的各項條件(角度與長度)間的關係有更深刻的了解，也提供老師們在命題時做為參考的來源。

作者聯絡方式：

歐志昌: lover119@ms41.hinet.net

施羿如: yiru@tea.nknush.kh.edu.tw

柳賢: t1251@nknu.edu.tw